Maticový počet – Prerekvizity I.

Prehľad definícií, tvrdení a dôležitých faktov z LAG I. a II. v 1. ročníku.

Do budúcej prednášky si prezrite nasledujúce "rámčeky" – prevažne prebrané z prvých troch kapitol knihy C. D. Meyera, *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. Ak sú niektoré tvrdenia neznáme, resp. netušíte, o čom sa hovorí a neviete zdôvodniť prečo by mali platiť, osviežte si danú tému prečítaním príslušnej kapitoly.

Hlavný účinkujúci

Systém m lineárnych rovníc s n neznámymi:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

Tri možnosti pre riešenie systému

- JEDNOZNAČNÉ RIEŠENIE: Existuje jediná n-tica x_i spĺňajúca všetky rovnice súčasne.
- NEEXISTENCIA RIEŠENIA: Žiadna n-tica x_i nespĺňa súčasne všetky rovnice – množina riešení je prázdna.
- NEKONEČNE VEĽA RIEŠENÍ: Existuje nekonečne veľa rôznych n-tíc x_i spĺňajúcich všetky rovnice súčasne. Dá sa ukázať, že ak má systém viac ako jedno riešenie, potom ich má nekonečne veľa.

Elementárne Riadkové Operácie

- Vymeniť i-tu a j-tu rovnicu.
- Nahradiť i-tu rovnicu jej nenulovým násobkom.
- Nahradiť j-tu rovnicu kombináciou jej samej s pripočítaným násobkom i-tej rovnice.

Gaussova eliminácia (štvorcová matica)

Prechod od $(A|b)$ k $(U|c)$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & b_n \end{array}\right) \xrightarrow{\text{eliminácia}} \left(\begin{array}{cccc|c} \underline{u_{11}} & u_{12} & \ldots & u_{1n} & c_1 \\ 0 & \underline{u_{22}} & \ldots & u_{2n} & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \underline{u_{nn}} & c_n \end{array}\right)$$

(Nenulové) prvky u_{ii} sa nazývajú *pivoty*.

Algoritmus pre spätnú substitúciu (štvorcová matica)

Určiť $x_n = c_n/u_{nn}$, a potom rekurzívne:

$$x_i = \frac{1}{u_{ii}}\left(c_i - u_{i,i+1}x_{i+1} - u_{i,i+2}x_{i+2} - \cdots - u_{in}x_n\right)$$

pre $i = n-1, n-2, \ldots, 2, 1$.

Počet operácií pre Gaussovu elimináciu (štvorcová matica)

Gaussova eliminácia spolu so spätnou substitúciou si pre $n \times n$ systém vyžaduje

$$\frac{n^3}{3} + n^2 - \frac{n}{3} \qquad \text{násobení/delení}$$

a

$$\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{5n}{6} \qquad \text{sčítaní/odčítaní.}$$

S rastúcim n člen $n^3/3$ dominuje. (Rozmyslite si detaily)

Gauss-Jordanova eliminácia (štvorcová matica)

- V každom kroku eliminácie sa príslušný riadok prenásobí tak, by bol pivot 1
- V každom kroku sa vynulujú všetky zložky pod aj *nad* pivotom

Dostávame prechod od $(A|b)$ k $(I|s)$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & b_n \end{array}\right) \xrightarrow{\text{G-J eliminácia}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \ldots & 0 & s_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & s_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & s_n \end{array}\right),$$

v pravom stĺpci sa objaví riešenie s_i.

Počet operácií pre Gauss-Jordanovu elimináciu (štvorcová matica)

Gauss-Jordanov algoritmus pre si pre $n \times n$ systém vyžaduje

$$\frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{2} \qquad \text{násobení/delení}$$

a

$$\frac{n^3}{2} - \frac{n}{2} \qquad \text{sčítaní/odčítaní.}$$

S rastúcim n dominuje člen $n^3/2$, čiže Gauss-Jordanov algoritmus potrebuje o cca. 50% viac operácií ako Gaussova eliminácia so spätnou substitúciou. (Rozmyslite si detaily)

Gaussova eliminácia (obdĺžniková matica)

Ak U je rozšírená matica systému získaná po vykonaní $i-1$ krokov eliminácie, v kroku i treba vykonať nasledovné:

- Prechádzajúc zľava doprava, v U nájsť prvý stĺpec obsahujúci nenulovú zložku v i-tom alebo nižšom riadku. Stĺpec označme U_{*j}.
- Pivot v kroku i bude umiestnený na pozícii (i, j).
- Ak je to nutné, treba vymeniť i-ty riadok s nižším, aby sme dosiahli nenulovosť pozície (i, j). Následne sa vynulujú všetky pozície pod ňou.
- Ak riadok U_{i*} aj všetky nižšie položené riadky U sú nulové, eliminácia končí.

Matica v stupňovitom tvare (Row Echelon Form)

Matica E typu $m \times n$ s riadkami E_{i*} a stĺpcami E_{*j} je v *stupňovitom (schodkovitom) tvare*, ak platí

- Ak je riadok E_{i*} nulový, všetky riadky pod ním sú tiež nulové.
- Ak je prvou (zľava) nenulovou pozíciou v riadku E_{i*} pozícia j, potom sú všetky zložky v stĺpcoch $E_{*1}, E_{*2}, \ldots, E_{*j}$ v nižších riadkoch ako i nulové.

Typickým príkladom, so zakrúžkovanými *pivotmi*, je:

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hodnosť matice

Nech sa dá matica $A_{m\times n}$ zredukovať elimináciou na stupňovitý tvar E. *Hodnosť* matice A je

$$\begin{aligned} h(A) &= \text{počet pivotov} \\ &= \text{počet nenulových riadkov } E \\ &= \text{počet “pivotových” stĺpcov } A \end{aligned}$$

Redukovaný stupňovitý tvar (Reduced Row Echelon Form)

Matica E typu $m \times n$ je v *redukovanom stupňovitom tvare*, ak platí

- E je v stupňovitom tvare
- Prvá nenulová zložka (t.j. pivot) v každom riadku je 1
- Zložky nad pivotom sú nulové

Typickým príkladom je:

$$\begin{pmatrix} 1 & * & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Fakt: Redukovaný stupňovitý tvar pre maticu A je jednoznačný – t.j. existuje práve jedna matica v redukovanom stupňovitom tvare E_A, ktorá je riadkovo ekvivalentná matici A.

Lineárna závislosť stĺpcov A a E_A

- Každý stĺpec E_{*k} matice E_A neobsahujúci pivot je lineárnou kombináciou stlṕcov E_A s pivotmi nachádzajúcimi sa naľavo od E_{*k}. Teda

$$\begin{aligned} E_{*k} &= \mu_1 E_{*p_1} + \mu_2 E_{*p_2} + \cdots + \mu_j E_{*p_j} \\ &= \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \mu_j \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_j \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

  kde E_{*p_i} sú stĺpce s pivotom naľavo od E_{*k} a koeficienty μ_i pochádzajú z j nenulových zložiek v E_{*k}.
- Rovnaká lineárna závislosť existuje aj pre stĺpce matice A, t.j. stĺpec A_{*k} (bezpivotový) sa dá vyjadriť ako

$$A_{*k} = \mu_1 A_{*p_1} + \mu_2 A_{*p_2} + \cdots + \mu_j A_{*p_j},$$

  kde A_{*p_i} sú "pivotové" stĺpce matice A naľavo od stĺpca A_{*k} a koeficienty μ_i sa dajú zistiť z E_A.

Konzistencia

Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné s konzistentnosťou systému $(A|b)$

- Počas riadkovej eliminácie systému $(A|b)$ nikdy nedostaneme riadok tvaru

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha \end{array} \right), \qquad \text{kde} \qquad \alpha \neq 0.$$

- b je "nepivotový" stĺpec rozšírenej matice $(A|b)$.
- $h(A|b) = h(A)$.
- pravá strana b sa dá vyjadriť ako lineárna kombinácia "pivotových" stĺpcov matice A.

Riešenie homogénneho systému $Ax = 0$

Nech $A_{m\times n}$ je matica koeficientov systému m lineárnych rovníc o n neznámych a predpokladajme, že $h(A) = r$.

- Premenné zodpovedajúce stĺpcom s pivotmi sa nazývajú *viazané premenné* a premenné zodpovedajúce "bezpivotovým" stĺpcom sa nazývajú *voľné premenné*.
- r premenných je viazaných, $n - r$ je voľných
- Na nájdenie všetkých riešení $Ax = 0$ treba redukovať maticu A Gaussovou elimináciou na stupňovitý tvar a spätnou substitúciou vyjadriť viazané premenné pomocou voľných premenných (parametrov). Výsledkom je *všeobecné riešenie* v tvare

$$x = x_{f_1} h_1 + x_{f_2} h_2 + \cdots + x_{f_{n-r}} h_{n-r},$$

  kde $x_{f_1}, x_{f_2}, \ldots, x_{f_{n-r}}$ sú voľné premenné a $h_1, h_2, \ldots, h_{n-r}$ sú riešenia homogénneho systému zodpovedajúce jednotlivým voľným premenným.
- Homogénny systém má jednoznačné (nulové) riešenie práve vtedy, keď $h(A) = n$, teda práve vtedy, keď nemá žiadne voľné premenné.

Riešenie nehomogénneho systému $Ax = b$

Nech $(A|b)$ je rozšírená matica pre konzistentný $m \times n$ nehomogénny systém, v ktorom $h(A) = r$.

- Redukovaním $(A|b)$ Gaussovou elimináciou na stupňovitý tvar a následným vyjadrením viazaných premenných pomocou voľných premenných dostávame *všeobecné riešenie*:
$$x = p + x_{f_1}h_1 + x_{f_2}h_2 + \cdots + x_{f_{n-r}}h_{n-r}.$$
Voľbou voľných premenných x_{f_i} vieme vygenerovať všetky riešenia.
- Stĺpec p zopdovedá (nejakému) čiastkovému riešeniu nehomogénneho systému.
- Výraz $x_{f_1}h_1 + x_{f_2}h_2 + \cdots + x_{f_{n-r}}h_{n-r}$ zodpovedá všeobecnému riešeniu príslušného homogénneho systému $Ax = 0$.
- Nasledujúce podmienky jednoznačnosti riešenia sú ekvivalentné:
  - $h(A) = n =$ počet neznámych.
  - Systém nemá voľné premenné.
  - Príslušný homogénny systém má jednoznačné riešenie.

Súčet matíc

Ak A a B sú $m \times n$ matice, ich *súčet* je $m \times n$ matica získaná sčítaním príslušných zložiek A a B. T.j.
$$(A + B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij} \qquad \text{pre všetky } i \text{ a } j.$$

Vlastnosti súčtu matíc

Pre $m \times n$ matice A, B a C platí:

Uzavretosť:	$A + B$ je opäť matica typu $m \times n$
Asociatívnosť:	$(A + B) + C = A + (B + C)$
Komutatívnosť:	$A + B = B + A$
Identita vzhľadom na sčítanie:	nulová $m \times n$ matica 0, ktorej všetky zložky sú nulové, spĺňa $A + 0 = A$.
Inverzný prvok vzhľadom na sčítanie:	$m \times n$ matica $(-A)$ spĺňa $A + (-A) = 0$.

Inými slovami, matice typu $m \times n$ tvoria aditívnu komutatívnu grupu.

Násobenie matíc skalárom

Súčin skaláru α a matice A, značený αA, sa získa vynásobením každej zložky A skalárom α. T.j. $(\alpha A)_{ij} = \alpha(A)_{ij}$, pre všetky i a j.

Vlastnosti násobenia matíc skalárom

Pre $m \times n$ matice A, B a skaláry α a β platí:

Uzavretosť:	αA je opäť matica typu $m \times n$
Asociatívnosť:	$(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$
Distributívnosť I:	$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
Distributívnosť II:	$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
Vlastnosť jednotky :	$1A = A$

Inými slovami, matice typu $m \times n$ tvoria vektorový priestor $M_{m,n}$.

Transpozícia matíc

Transponovanú maticu k matici A získame výmenou jej riadkov a stĺpcov, značíme A^T. T.j. ak $A = (a_{ij})$, potom $(A^T)_{ij} = a_{ji}$. Zjavne $\left(A^T\right)^T = A$.

Hermitovské združenie matíc

Pre maticu $A = (a_{ij})$ nazvývame maticu $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})$ k nej *komplexne združenou* a maticu $A^* = \bar{A}^T = \overline{A^T}$ k nej *hermitovsky združenou* (pre jej zložky platí $(A^*)_{ij} = \bar{a}_{ji}$). Pre všetky matice platí $(A^*)^* = A$. Rovnosť $A^* = A^T$ platí práve vtedy, keď má A reálne zložky. Niekedy sa matica A^* nazýva *adjungovanou* maticou k matici A, alternatívne značenie $A^\dagger$, A^H.

Vlastnosti transpozície

Ak A a B sú matice rovnakého typu a α je skalár, potom platí:

$$(A+B)^T = A^T + B^T \qquad \text{a} \qquad (A+B)^* = A^* + B^*.$$

$$(\alpha A)^T = \alpha A^T \qquad \text{a} \qquad (\alpha A)^* = \bar{\alpha} A^*.$$

Symetrie

Nech $A = (a_{ij})$ je štvorcová matica.

- A sa nazýva *symetrická* ak $A^T = A$, t.j. $a_{ij} = a_{ji}$.
- A sa nazýva *anti-symetrická* ak $A^T = -A$, t.j. $a_{ij} = -a_{ji}$.
- A sa nazýva *hermitovská* ak $A^* = A$, t.j. $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$. Ide o komplexné zovšeobecnenie symetrickosti.
- A sa nazýva *anti-hermitovská* ak $A^* = -A$, t.j. $a_{ij} = -\bar{a}_{ji}$. Ide o komplexné zovšeobecnenie anti-symetrickosti.

Lineárne zobrazenia

Predpokladajme, že $\mathcal{D}$ a $\mathcal{R}$ sú množiny, na ktorých je definované sčítanie a násobenie skalárom. Zobrazenie f, ktoré zobrazuje prvky $\mathcal{D}$ na prvky $\mathcal{R}$, sa nazýva *lineárne* ak

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \text{a} \qquad f(\alpha x) = \alpha f(x)$$

pre každé x a y v $\mathcal{D}$ a pre všetky skaláry α.

Lineárna kombinácia

Pre skaláry α_j a vektory x_j nazývame výraz

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j$$

lineárnou kombináciou x_j.

Násobenie matíc

- Matice A a B sa dajú násobiť (v poradí AB) práve vtedy, keď má A presne toľko stĺpcov, ako má B riadkov, t.j. A je typu $m \times p$ a B je typu $p \times n$.
- Pre matice $A_{m\times p} = (a_{ij})$ a $B_{p\times n} = (b_{ij})$ je ich *maticovým súčinom* AB matica typu $m \times n$, ktorej zložka na pozícii (i, j) sa rovná skalárnemu súčinu i-ho riadku A a j-ho stĺpca B, teda
$$(AB)_{ij} = A_{i*}B_{*j} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}.$$
- Ak sú matice nekompatibilných typov, t.j. A je typu $m \times p$ a B je typu $q \times n$ s $p \neq q$, potom súčin AB nie je definovaný.

Násobenie matíc nie je komutatívne

Násobenie matíc je vo všeobecnosti nekomutatíve, t.j. $AB \neq BA$ a to aj v prípade, keď oba súčiny existujú a majú rovnaké veľkosti (pre štvorcové matice).

Riadky a stĺpce súčinu matíc

Nech $A = (a_{ij})$ je typu $m \times p$ a $B = (b_{ij})$ je typu $p \times n$.
- $(AB)_{i*} = A_{i*}B$, t.j. platí: i-ty riadok $AB = (i\text{-ty riadok } A) \times B$.
- $(AB)_{*j} = AB_{*j}$, t.j. platí: j-ty stĺpec $AB = A \times (j\text{-ty stĺpec } B)$.
- $(AB)_{i*} = a_{i1}B_{1*} + a_{i2}B_{2*} + \cdots + a_{ip}B_{p*} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}B_{k*}$.
- $(AB)_{*j} = A_{*1}b_{1j} + A_{*2}b_{2j} + \cdots + A_{*p}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} A_{*k}b_{kj}$.

Z posledných dvoch rovností vyplýva, že každý riadok AB je lineárnou kombináciou riadkov B a každý stĺpec AB je lineárnou kombináciou stĺpcov A.

Maticový zápis lineárneho systému

Systém m lineárnych rovníc s n neznámymi
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned}$$
sa dá zapísať maticovou rovnicou $Ax = b$, kde
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$
Naopak, každá maticová rovnica v tvare $A_{m\times n}x_{n\times 1} = b_{m\times 1}$ reprezentuje systém m lineárnych rovníc o n neznámych.

Distributívne a asociatívne zákony pre násobenie matíc

Pre matice vhodných typov platí:
- $A(B + C) = AB + AC$ (distributívny zákon pre ľavé násobenie).
- $(D + E)F = DF + EF$ (distributívny zákon pre pravé násobenie).
- $A(BC) = (AB)C$ (asociatívny zákon).

Identická matica

Matica typu $n \times n$ s jednotkami na diagonále a všetkými ostatnými zložkami nulovými,

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

sa nazýva *identická (jednotková) matica*. Pre každú $m \times n$ maticu A platí

$$AI_n = A \qquad \text{a} \qquad I_m A = A.$$

Index v I_n sa nepoužíva, ak je veľkosť matice I zjavná z kontextu.

Pravidlo roznásobovania pre transpozíciu

Pre matice A a B, ktoré sa dajú násobiť, platí

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

Prípad hermitovského združenia je podobný:

$$(AB)^* = B^* A^*.$$

Násobenie blokových matíc

Predpokladajme, že A a B sú podelené na podmatice – tie sa nazývajú *bloky* – ako je naznačené nižšie:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1r} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \dots & A_{sr} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1t} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{r1} & B_{r2} & \dots & B_{rt} \end{pmatrix}.$$

Ak sa všetky páry (A_{ik}, B_{kj}) dajú násobiť, potom sú ich blokové delenia navzájom kompatibilné a súčin AB sa dá nájsť pomocou *blokového násobenia.* T.j. blok na pozícii (i,j) v AB je rovný

$$A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \dots + A_{ir}B_{rj}.$$

Inverzné matice

Pre danú štvorcovú maticu $A_{n\times n}$ sa matica $B_{n\times n}$ spĺňajúca

$$AB = I_n \qquad \text{a} \qquad BA = I_n$$

nazýva *inverznou maticou k A*. Vďaka jej jednoznačnosti môžeme značiť $B = A^{-1}$. Nie ku každej matici existuje inverzná; invertovateľné (invertibilné) matice sú práve *regulárne* matice a matice, ktoré nemajú inverznú maticu sú *singulárne.*

Riešenie maticových rovníc

- Ak A je regulárna matica, potom má maticová rovnica $A_{n\times n}X_{n\times p} = B_{n\times p}$ práve jedno riešenie v tvare
$$X = A^{-1}B.$$
- Špeciálne, systém n lineárnych rovníc o n neznámych $A_{n\times n}x_{n\times 1} = b_{n\times 1}$ má pre regulárnu maticu A jednoznačné riešenie $x = A^{-1}b$.

Existencia inverznej matice

Pre $n \times n$ maticu A sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:

- A^{-1} existuje. (A je invertibilná)
- $h(A) = n$. (A je regulárna)
- $A \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} I$.
- Z rovnosti $Ax = 0$ vyplýva $x = 0$.

Výpočet inverznej matice

Na výpočet inverznej matice k matici A sa dá použiť Gaussova-Jordanova eliminácia

$$(A|I) \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} (I|A^{-1}).$$

Jediný spôsob ako by mohol tento výpočet zlyhať je objavenie sa nulového riadku na ľavej strane rozšírenej matice, čo sa stane práve v prípade, ak je A singulárna. Praktickejšie sa inverzná matica počíta pomocou LU rozkladu.

Počet operácií pri výpočte inverznej matice

Výpočet $A_{n\times n}^{-1}$ pomocou redukcie $(A|I)$ s použitím Gauss-Jordanovej eliminácie si vyžaduje

- n^3 násobení/delení,
- $n^3 - 2n^2 + n$ sčítaní/odčítaní.

Vlastnosti inverzných matíc

Pre regulárne matice A a B platí:

- $(A^{-1})^{-1} = A$.
- Súčin AB je tiež regulárna matica.
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (pravidlo pre inverziu súčinu).
- $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ a $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

Súčin regulárnych matíc je regulárny

Ak sú $A_1, A_2, \ldots, A_k$ regulárne $n \times n$ matice, potom je aj ich súčin $A_1A_2 \ldots A_k$ regulárna matica a k nej inverznú získame násobením jednotlivých inverzných matíc v opačnom poradí

$$(A_1A_2 \ldots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \ldots A_2^{-1}A_1^{-1}.$$

Neumannov rad

Ak je $\lim_{n\to\infty} A^n = 0$, potom je $I - A$ regulárna a platí

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} A^k.$$

Takýto nekonečný rad sa nazýva *Neumannov rad*; poskytuje aproximácie pre $(I - A)^{-1}$ ak má matica A zložky malej veľkosti. Napr. pre priblíženie prvého rádu máme $(I - A)^{-1} \approx I + A$.

Elementárne matice

Matice v tvare $I - uv^T$, kde u a v sú $n \times 1$ stĺpcové vektory spĺňajúce $v^T u \neq 1$ sa nazývajú *elementárne matice.* Každá taká matica je regulárna a pre jej inverznú platí

$$(I - uv^T)^{-1} = I - \frac{uv^T}{v^T u - 1}.$$

Treba si všimnúť že aj inverzná matica k elementárnej matici je elementárna. Špeciálnou voľbou vektorov u a v vieme dostať elementárne matice zodpovedajúce elementárnym operáciám typu I, II a III. (pozri str. 131)

Vlastnosti elementárnych matíc

- Elementárne matice typov I, II a III zodpovedajú elementárnym *riadkovým* operáciám, ak nimi násobíme *zľava.*
- Elementárne matice typov I, II a III zodpovedajú elementárnym *stĺpcovým* operáciám, ak nimi násobíme *sprava.*

Súčin elementárnych matíc

- Štvorcová matica A je regulárna práve vtedy, ak sa dá vyjadriť ako súčin elementárnych matíc typu I, II a III.

Riadková a stĺpcová ekvivalencia

- Ak sa dá prejsť od matice A k matici B postupným vykonaním elementárnych riadkových a stĺpcových operácií, budeme hovoriť že matice A a B sú ekvivalentné; značíme $A \sim B$. Keďže elementárne riadkové a stĺpcové operácie zodpovedajú násobeniu elementárnymi maticami zľava, resp. sprava, máme
$$A \sim B \Longleftrightarrow PAQ = B \quad \text{pre regulárne } P \text{ a } Q.$$
- Ak sa dá prejsť od matice A k matici B postupným vykonaním elementárnych riadkových operácií, budeme hovoriť že matice A a B sú riadkovo ekvivalentné; značíme $A \overset{row}{\sim} B$. Inými slovami
$$A \overset{row}{\sim} B \Longleftrightarrow PA = B \quad \text{pre regulárnu } P.$$
- Ak sa dá prejsť od matice A k matici B postupným vykonaním elementárnych stĺpcových operácií, budeme hovoriť že matice A a B sú stĺpcovo ekvivalentné; značíme $A \overset{col}{\sim} B$. Inými slovami
$$A \overset{col}{\sim} B \Longleftrightarrow AQ = B \quad \text{pre regulárnu } Q.$$

(Lineárne) závislosti medzi stĺpcami a riadkami

- Ak $A \overset{row}{\sim} B$, potom lineárne vzťahy, ktoré platia pre stĺpce A platia aj pre stĺpce B. Teda
$$B_{*k} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j B_{*j} \qquad \text{práve vtedy, ak} \qquad A_{*k} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j A_{*j}.$$
- Špeciálne, vzťahy medzi stĺpcami A a jej redukovaného stupňovitého tvaru E_A sú rovnaké, preto všetky "nepivotové" stĺpce A musia byť lineárnymi kombináciami "pivotových" stĺpcov matice A.
- Ak $A \overset{col}{\sim} B$, potom lineárne vzťahy, ktoré platia pre riadky A platia aj pre riadky B.
- **Zhrnutie.** *Riadková* ekvivalencia zachováva vzťahy medzi *stĺpcami*, *stĺpcová* ekvivalencia zachováva vzťahy medzi *riadkami*.

Rank Normal Form

Ak je A matica typu $n \times n$ a $h(A) = r$, potom
$$A \sim N_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
N_r sa nazýva *rank normal form* (asi neexistuje ustálený slovenský termín) matice A a je konečným výsledkom úplnej eliminácie matice A používajúcej riadkové aj stĺpcové operácie.

Testovanie riadkovej/stĺpcovej ekvivalencie

Pre matice A a B typu $m \times n$ platia nasledujúce tvrdenia:
- $A \sim B$ práve vtedy, keď $h(A) = h(B)$.
- $A \overset{row}{\sim} B$ práve vtedy, keď $E_A = E_B$.
- $A \overset{col}{\sim} B$ práve vtedy, keď $E_{A^T} = E_{B^T}$.

Dôsledok. Násobenie regulárnymi maticami nemení hodnosť matice.

Transpozícia a hodnosť

Transpozícia nemení hodnosť matice, t.j. pre všetky $m \times n$ matice platí
$$h(A) = h(A^T) \qquad \text{a} \qquad h(A) = h(A^*).$$