Maticový počet – Prehľad IV.

Prehľad definícií, tvrdení a dôležitých faktov z LAG I. a II. v 1. ročníku.

Priebežne si prezrite nasledujúce "rámčeky" – prebrané z kapitoly 7. knihy C. D. Meyera, *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. Neoznačené by mali byť známe z LAG I, II. Tie, ktoré sú označené jednou hviezdičkou *, asi v prvom ročníku neboli a pravdepodobne sa k nim nedostaneme podrobne ani na prednáške. Tým, ktoré sú označené dvoma hviezdičkami **, sa ešte budeme venovať.

Vlastné hodnoty a vlastné vektory

Pre $n \times n$ maticu A sa skalár λ a nenulový vektor $x_{n\times 1}$ spĺňajúce $Ax = \lambda x$ nazývajú *vlastná hodnota*, resp. *vlastný vektor* matice A. Množina (rôznych) vlastných hodnôt, označená $\sigma(A)$, sa nazýva *spektrum* matice A.

- $\lambda \in \sigma(A) \iff A - \lambda I$ je singulárna $\iff \det(A - \lambda I) = 0$.
- $\{x \neq 0 \mid x \in \mathcal{N}(A - \lambda I)\}$ je množina všetkých vlastných vektorov prislúchajúcich λ. Priestor $\mathcal{N}(A - \lambda I)$ sa nazýva *vlastný (pod)priestor* matice A.
- Nenulové riadkové vektory y^* spĺňajúce $y^*(A - \lambda I) = 0$ sa nazývajú *ľavé vlastné vektory* matice A.

Charakteristický polynóm a charakteristická rovnica

- *Charakteristický polynóm* matice $A_{n\times n}$ je $\chi(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. Stupeň $\chi(\lambda)$ je n a vedúci člen $(-1)^n \lambda^n$.
- *Charakteristická rovnica* pre maticu A je $\chi(\lambda) = 0$.
- Vlastné hodnoty matice A sú riešeniami charakteristickej rovnice, teda korene charakteristického polynómu.
- Matica A má spolu n vlastných hodnôt, niektoré však môžu byť komplexné (aj ak sú zložky A reálne) alebo môžu byť niektoré vlastné hodnoty viacnásobné.
- Ak A obsahuje iba reálne zložky, potom sa jej komplexné vlastné hodnoty musia vyskytovať v združených pároch, t.j. ak $\lambda \in \sigma(A)$, aj $\bar{\lambda} \in \sigma(A)$.

** Koeficienty charakteristického polynómu

Ak má charakteristická rovnica matice $A_{n\times n}$ tvar $\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \cdots + c_{n-1}\lambda + c_n = 0$ a ak s_k označuje k-ty symetrický polynóm vlastných hodnôt $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, potom

- $c_k = (-1)^k \sum$(všetky hlavné $k \times k$ minory),
- $s_k = \sum$(všetky hlavné $k \times k$ minory),
- $\mathrm{Tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = -c_1$,
- $\det(A) = \lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_n = (-1)^n c_n$.

** Geršgorinove kruhy

- Všetky vlastné hodnoty matice $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ sa nachádzajú v množine $\mathcal{G}_r$ – zjednotení n *Geršgorinovych kruhov* daných pomocou
$$|z - a_{ii}| \le r_i, \qquad \text{kde} \qquad r_i = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \|a_{ij}\| \quad \text{pre } i = 1, 2, \ldots, n.$$
Inými slovami, vlastné hodnoty sú "uväznené" v sade kruhov so stredmi a_{ii} s polomermi danými súčtami absolútnych hodnôt zložiek v stĺpci A_{*i} okrem diagonálnej zložky a_{ii}.
- Navyše, ak zjednotenie $\mathcal{U}$ k-tich Geršgorinovych kruhov nemá prienik so zvyšnými $n - k$ kruhmi, potom sa v k-kruhovom $\mathcal{U}$ nachádza práve k vlastných hodnôt matice A, počítajúc s násobnosťami.
- Keďže $\sigma(A) = \sigma(A^T)$, sčítanie absolútnych hodnôt mimodiagonálnych zložiek po riadkoch sa dá nahradiť súčtom po stĺpcoch, teda vlastné hodnoty sa nachádzajú aj v zjednotení kruhov $\mathcal{G}_c$ daných pomocou
$$|z - a_{ii}| \le c_j, \qquad \text{kde} \qquad c_j = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} \|a_{ij}\| \quad \text{pre } j = 1, 2, \ldots, n.$$
- Kombináciou riadkového a stĺpcového prístupu dostávame, že vlastné hodnoty matice A sa nachádzajú v prieniku $\mathcal{G}_r \cap \mathcal{G}_c$.

Podobnosť

- Dve $n \times n$ matice A a B sa nazývajú *podobné*, ak pre ne existuje regulárna matica P spĺňajúca $P^{-1}AP = B$. Súčin $P^{-1}AP$ sa nazýva *podobnostnou transformáciou* matice A.
- *Fundamentálny problém:* Pre danú štvorcovú maticu A nájsť jej najjednoduchší tvar dosiahnuteľný pomocou podobnostných transformácií.

Diagonalizovateľnosť

- Štvorcová matica A sa nazýva *diagonalizovateľná*, ak je A podobná diagonálnej matici.
- *Úplná sada vlastných vektorov* pre $A_{n\times n}$ je ľubovoľná sada n lineárne nezávislých vlastných vektorov matice A; takáto sada tvorí bázu $\mathbb{R}^n$, resp. $\mathbb{C}^n$. Nie všetky matice majú úplnú sadu vlastných vektorov; zvyknú sa niekedy nazývať aj ako *defektívne* matice.
- Matica $A_{n\times n}$ je diagonalizovateľná práve vtedy, keď má úplnú sadu vlastných vektorov. Navyše, $P^{-1}AP = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ práve vtedy, keď stĺpce P tvoria kompletnú sadu vlastných vektorov a λ_j sú príslušné vlastné hodnoty, t.j. (λ_j, P_{*j}) tvoria pár vlastnej hodnoty a vlastného vektora pre maticu A.

Podobnosť zachováva vlastné hodnoty

Operácie riadkovej redukcie nezachovávajú vlastné hodnoty. Podobné matice však majú rovnaký charakteristický polynóm, a teda aj rovnaké vlastné hodnoty s násobnosťami. *Pozor!* Podobné matice nemusia mať rovnaké vlastné vektory, ich zmena súvisí s maticou podobnosti P.

** Schurova veta o triangularizácii

Každá štvorcová matica je unitárne podobná hornej trojuholníkovej matici. To znamená, že pre každú $A_{n\times n}$ existuje unitárna matica U (nie jednoznačná) a horná trojuholníková T (nie jednoznačná) také, že $U^*AU = T$. Diagonálne zložky T sú vlastnými hodnotami A.

Násobnosti

Pre $\lambda \in \sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s\}$ definujme:

- *Algebraická násobnosť* vlastnej hodnoty λ zodpovedá násobnosti λ ako koreňa charakteristického polynómu $\chi_A(x)$. Inými slovami, $alg\ mult_A(\lambda_i) = a_i$ práve vtedy, keď $(x-\lambda_1)^{a_1} \ldots (x-\lambda_s)^{a_s} = 0$ je charakteristickou rovnicou matice A.
- Ak $alg\ mult_A(\lambda) = 1$, λ sa nazýva *jednoduchou* vlastnou hodnotou matice A.
- *Geometrická násobnosť* vlastnej hodnoty λ je $\dim \mathcal{N}(A - \lambda I)$. Inými slovami, $geo\ mult_A(\lambda)$ zodpovedá najväčšiemu počtu lineárne nezávislých vlastných vektorov prislúchajúcich k vlastnej hodnote λ.
- Vlastné hodnoty, pre ktoré $alg\ mult_A(\lambda) = geo\ mult_A(\lambda)$, sa nazývajú *polo-jednoduché* (semisimple) vlastné hodnoty matice A.

Nerovnosť násobností

Pre každú maticu $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ a pre každé $\lambda \in \sigma(A)$ platí:

$$geo\ mult_A(\lambda) \leq alg\ mult_A(\lambda).$$

Lineárna nezávislosť vlastných vektorov

Nech $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\}$ sú navzájom rôzne vlastné hodnoty matice A.

- Ak $\{(\lambda_1, x_1), (\lambda_2, x_2), \ldots, (\lambda_k, x_k)\}$ je množina párov vlastná hodnota – vlastný vektor, potom je $\mathcal{S} = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ lineárne nezávislá množina.
- Ak je $\mathcal{B}_i$ bázou $\mathcal{N}(A - \lambda_i I)$, potom je $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k$ lineárne nezávislá množina.

Diagonalizovateľnosť a násobnosti

Matica A typu $n \times n$ je diagonalizovateľná práve vtedy, keď

$$geo\ mult_A(\lambda) = alg\ mult_A(\lambda)$$

pre každé $\lambda \in \sigma(A)$, teda práve vtedy, keď je kav zdá jej vlastná hodnota polojednoduchá.

Rôzne vlastné hodnoty

Ak žiadna z vlastných hodnôt matice A nie je viacnásobná, potom je A diagonalizovateľná. *Upozornenie!* Opak nemusí platiť.

* Spektrálna veta pre diagonalizovateľné matice

Matica $A_{n\times n}$ so spektrom $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\}$ je diagonalizovateľná práve vtedy, ak existujú matice $\{G_1, G_2, \ldots, G_k\}$ spĺňajúce

$$A = \lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 + \cdots + \lambda_k G_k,$$

pričom G_i majú nasledujúce vlastnosti:

- G_i je projekčná matica na $\mathcal{N}(A - \lambda_i I)$ v smere $\mathcal{R}(A - \lambda_i I)$.
- $G_i G_j = 0$ pre $i \neq j$.
- $G_1 + G_2 + \cdots + G_k = I$.

Takýto rozklad sa nazýva *spektrálny rozklad matice* A a G_i sa nazývajú *spektrálne projektory* prislúchajúce A.

* Jednoduché vlastné hodnoty a projektory

Ak x a $y*$ sú pravé a ľavé vlastné vektory prislúchajúce jednoduchej vlastnej hodnote $\lambda \in \sigma(A)$, potom

$$G = \frac{xy^*}{y^*x}$$

je projektor na $\mathcal{N}(A - \lambda I)$ v smere $\mathcal{R}(A - \lambda I)$, teda G je spektrálny projektor prislúchajúci vlastnej hodnote λ.

Súhrn diagonalizovateľnosti

Pre $n \times n$ maticu A so spektrom $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ sú nasledujúce podmienky ekvivalentné:

- A je podobná diagonálnej matici, t.j. $P^{-1}AP = D$.
- A má úplnú sadu lineárne nezávislých vlastných vektorov.
- Každá vlastná hodnota λ_i je polojednoduchá, t.j. $\mathit{geo\ mult}_A(\lambda_i) = \mathit{alg\ mult}_A(\lambda_i)$.
- $A = \lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 + \cdots + \lambda_k G_k$, kde
  - ▷ G_i je projektor na $\mathcal{N}(A - \lambda_i I)$ v smere $\mathcal{R}(A - \lambda_i I)$,
  - ▷ $G_i G_j = 0$ pre $i \neq j$,
  - ▷ $G_1 + G_2 + \cdots + G_k = I$,
  - ▷ $G_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} (A - \lambda_j I) / \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} (\lambda_i - \lambda_j)$,
  - ▷ Ak λ_i je jednoduchá vlastná hodnota, ktorej prislúchajú pravý a ľavý vlastný vektor x, resp. y^*, potom $G_i = xy^*/y^*x$.

** Funkcie diagonalizovateľných matíc

Nech $A = PDP^{-1}$ je diagonalizovateľná matica, v ktorej sú vlastné hodnoty v $D = \operatorname{diag}(\lambda_1 I, \lambda_2 I, \dots, \lambda_k I)$ zlúčené pri opakovaní. Pre funkciu $f(z)$, ktorá je definovaná pre každé $\lambda_i \in \sigma(A)$, definujme

$$\begin{aligned} f(A) = Pf(D)P^{-1} &= P \begin{pmatrix} f(\lambda_1)I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f(\lambda_2)I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f(\lambda_k)I \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= f(\lambda_1)G_1 + f(\lambda_2)G_2 + \cdots + f(\lambda_k)G_k, \end{aligned}$$

kde G_i je i-ty spektrálny projektor prislúchajúci vlastnej hodnote λ_i.

* Nekonečné rady

Ak $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ konverguje pre $|z - z_0| < r$ a ak $|\lambda_i - z_0| < r$ pre každú vlastnú hodnotu diagonalizovateľnej matice A, potom

$$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (A - z_0 I)^n.$$

Navyše sa dá ukázať, že maticový rad na pravej strane konverguje práve vtedy, keď $|\lambda_i - z_0| < r$ pre každé λ_i, bez ohľadu na to, či je alebo nie je matica A diagonalizovateľná. Preto takýto rad slúži ako definícia $f(A)$ pre funkcie, ktoré sa dajú vyjadriť pomocou Taylorovho radu bez ohľadu na diagonalizovateľnosť matice A.

*** Spektrálne projektory**

Ak je A diagonalizovateľná a $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\}$, potom sa dá spektrálny projektor na $\mathcal{N}(A - \lambda_i I)$ v smere $\mathcal{R}(A - \lambda_i I)$ vyjadriť ako

$$G_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} (A - \lambda_j I) / \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} (\lambda_i - \lambda_j), \qquad \text{pre} \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Následne, ak je $f(z)$ definovaná na $\sigma(A)$, potom $f(A) = \sum_{i=1}^{k} f(\lambda_i) G_i$ je nejaký polynóm v A stupňa nanajvýš $k - 1$.

*** Diferenciálne rovnice**

VIAC NESKÔR

Stabilita

Unitárna diagonalizácia

Vlastnosti normálnych matíc

Symetrické a hermitovské matice

Courantova-Fischerova veta

Singulárne hodnoty a vlastné hodnoty

Kladne definitné matice

Kladne semidefinitné matice

Kvadratické formy

Sylvestrov zákon zotrvačnosti

Jordanov tvar nilpotentnej matice

Jednoznačnosť Jordanovej štruktúry

Index vlastnej hodnoty

Jordanov tvar

Konštrukcia Jordanovych reťazcov

Funkcie Jordanovych blokov

Maticové funkcie

Spektrálny rozvoj funkcie $f(A)$

Konvergenica k nule

Neumannove rady

a tak dalej