

Úlohy (strany a číslovanie) sú z knihy Carla D. Meyera *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*.

1. (3.10.1) Nech  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 18 & 26 \\ 3 & 16 & 30 \end{pmatrix}$ .

(a) Nájdite  $LU$  faktory matice  $A$ .

(b) Použite  $LU$  faktory pri riešení  $Ax_1 = b_1$  a  $Ax_2 = b_2$  pre

$$b_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad b_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

(c) Použite  $LU$  faktory pre určenie  $A^{-1}$ . (Pozri knihu.)

2. (3.10.3) Určite všetky hodnoty parametra  $\xi$ , pre ktoré nebude pre maticu  $A = \begin{pmatrix} \xi & 2 & 0 \\ 1 & \xi & 1 \\ 0 & 1 & \xi \end{pmatrix}$

existovať  $LU$  rozklad.

3. (3.10.4) Ak je  $A$  regulárna matica, ktorá má  $LU$  rozklad, ukážte, že jej  $(k+1)$ -vý pivot pri štandardnej Gaussovej eliminácii používajúcej iba operácie typu III bude spĺňať:

$$p_{k+1} = a_{k+1,k+1} - c^T A_k^{-1} b,$$

kde  $A_k$  a

$$A_{k+1} = \begin{pmatrix} A_k & b \\ c^T & a_{k+1,k+1} \end{pmatrix}$$

sú hlavné ľavé horné podmatice veľkosti  $k$ , resp.  $k+1$ . Použite tento výpočet na dôkaz nenulovosti pivotov matice  $A$ , za predpokladu existencie jej  $LU$  rozkladu. (Bude asi vhodné ukázať, že  $p_{k+1} = u_{k+1,k+1}$ , kde  $u_{k+1,k+1}$  je nenulový diagonálny prvok matice  $U$ )

4. (3.10.5) Zdôvodnite prečo pre maticu  $A$ , ktorej zložky sú celočíselné a všetky jej pivoty sú rovné 1, je aj  $A^{-1}$  celočíselná matica.

*Pozn.:* Tento fakt sa dá využiť na konštrukciu náhodných celočíselných matíc s celočíselnými inverzami. Najprv sa náhodne vygenerujú celočíselné matice  $L$  a  $U$  s jednotkovými diagonálami a následne sa vynásobia na  $A = LU$ .

5. (3.10.6) Uvažujme tridiagonálnu maticu  $T = \begin{pmatrix} \beta_1 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \beta_2 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \beta_3 & \gamma_3 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & \beta_4 \end{pmatrix}$ .

(a) Za predpokladu, že  $A$  má  $LU$  rozklad, overte, že spĺňa:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1/\pi_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2/\pi_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3/\pi_3 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} \pi_1 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \pi_2 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \pi_3 & \gamma_3 \\ 0 & 0 & 0 & \pi_4 \end{pmatrix},$$

kde  $\pi_i$  sú generované rekurentným predpisom

$$\pi_1 = \beta_1 \quad \text{a} \quad \pi_{i+1} = \beta_{i+1} - \frac{\alpha_i \gamma_i}{\pi_i}.$$

*Pozn.* Keďže takýto vzťah platí pre tridiagonálne matice ľubovoľnej veľkosti, ich  $LU$  rozklad sa dá spočítať veľmi ľahko.

(b) Použite predošlý rekurentný vzorec na nájdenie  $LU$  rozkladu  $n \times n$  matice

$$T_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(Pozri Príklad 1.4.1 na str. 19)

**6.** (3.10.7) Matica  $A_{n \times n}$  sa nazýva *pásovou maticou* (band matrix) ak  $a_{ij} = 0$  pre  $|i-j| > w$  pre nejaké nezáporné celé číslo  $w$ , ktoré sa nazýva *šírka pásu* (bandwidth). Inými slovami, nenulové zložky  $A$  sa nachádzajú na páse vedľajších diagonál šírky  $w$  nad a pod hlavnou diagonálou. Napríklad, tridiagonálne matice sú pásové matice so šírkou pásu 1, diagonálne matice sú pásové matice so šírkou pásu 0.

Overte, že ak je  $A$  regulárna pásová matica so šírkou pásu  $w$  a  $A$  má  $LU$  rozklad, potom  $L$  zdedí dolnú pásovú štruktúru  $A$  a  $U$  zdedí hornú pásovú štruktúru  $A$  – t.j. matica  $L$  má “dolnú pásovú šírku”  $w$  a matica  $U$  má “hornú pásovú šírku”  $w$ .

**7.** (3.10.9) (a) Nájďte  $LDU$  faktory pre maticu  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 18 & 26 \\ 3 & 16 & 30 \end{pmatrix}$  (rovnaká ako v úlohe č. 1).

(b) Ukážte, že ak má matica  $LDU$  rozklad, tak je jednoznačný.

(c) Vysvetlite prečo pre symetrickú maticu  $A$  s  $LDU$  rozkladom tento musí mať tvar  $A = LDL^T$ .