

Úlohy (strany a číslovanie) sú z knihy Carla D. Meyera *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*.

Zostali nám ešte poriadne resty z minulých úloh ...

1. (5.13.14) Nech \mathcal{M} a \mathcal{N} sú podpriestory priestoru \mathcal{V} a $P_{\mathcal{M}}, P_{\mathcal{N}}$ sú príslušné ortogonálne projekčné operátory.

(a) Ukážte, že $\mathcal{R}(P_{\mathcal{M}} + P_{\mathcal{N}}) = \mathcal{R}(P_{\mathcal{M}}) + \mathcal{R}(P_{\mathcal{N}}) = \mathcal{M} + \mathcal{N}$.

(b) Vysvetlite prečo $\mathcal{M} \perp \mathcal{N}$ práve vtedy, keď $P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{N}} = 0$.

(b) Zdôvodnite, prečo je $P_{\mathcal{M}} + P_{\mathcal{N}}$ projekčný operátor práve vtedy, keď $P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{N}} = 0$. V tom prípade $\mathcal{R}(P_{\mathcal{M}} + P_{\mathcal{N}}) = \mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$ a $\mathcal{M} \perp \mathcal{N}$.

2. (5.13.15) *Andersonova–Duffinova formula.* Ukážte, že ak \mathcal{M} a \mathcal{N} sú podpriestory toho istého priestoru, potom ortogonálny projektor na $\mathcal{M} \cap \mathcal{N}$ je daný vzorcom $P_{\mathcal{M} \cap \mathcal{N}} = 2P_{\mathcal{M}}(P_{\mathcal{M}} + P_{\mathcal{N}})^{\dagger}P_{\mathcal{N}}$.

Návod: Použite vzťah (5.13.12, str. 435) a predošlé cvičenie na odvodenie $P_{\mathcal{M}}(P_{\mathcal{M}} + P_{\mathcal{N}})^{\dagger}P_{\mathcal{N}} = P_{\mathcal{N}}(P_{\mathcal{M}} + P_{\mathcal{N}})^{\dagger}P_{\mathcal{M}}$. Označiac $Z = 2P_{\mathcal{M}}(P_{\mathcal{M}} + P_{\mathcal{N}})^{\dagger}P_{\mathcal{N}}$, z toho odvoďte $Z = P_{\mathcal{M} \cap \mathcal{N}}Z = P_{\mathcal{M} \cap \mathcal{N}}$.

3. (5.5.3) Použite Gram–Schmidtov proces so štandardným hermitovským skalárnym súčinom v \mathbb{C}^3 na vektory $\left\{ \begin{pmatrix} i \\ i \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} \right\}$.

4. (5.5.5) Vysvetlite, čo sa stane, ak sa Gram–Schmidtova ortogonalizácia použije na lineárne závislú množinu vektorov.

5. (5.5.8) Ukážte, že ak $h(A_{m \times n}) = n$, potom je obdĺžnikový QR rozklad matice A jednoznačný. T.j. ak $A = QR$, kde $Q_{m \times n}$ má ortonormálne stĺpce a $R_{n \times n}$ je horná trojuholníková s kladnými zložkami na diagonále, potom sú Q a R určené jednoznačne.

6. (5.5.11) Nech \mathcal{V} je priestor spojitých reálnych funkcií na intervale $[-1, 1]$ so skalárnym súčinom definovaným ako

$$\langle f | g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$$

a \mathcal{S} je podpriestor \mathcal{V} generovaný tromi lineárne nezávislými polynómami $p_0 = 1$, $p_1 = x$ a $p_2 = x^2$.

(a) Použite Gram–Schmidtovu ortogonalizáciu na nájdenie ortogonálnej množiny $\{q_0, q_1, q_2\}$, ktorá generuje \mathcal{S} . Toto sú prvé tri tzv. normalizované *Legendrove polynómy*.

(b) Overte, že q_n spĺňajú *Legendrovu diferenciálnu rovnicu*

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0$$

pre $n = 0, 1, 2$.