

Úlohy (strany a číslovanie) sú z knihy Carla D. Meyera *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*.

1. (5.11.7) Predpokladajme, že  $A = URV^T$  je  $URV$ -rozklad matice  $A$  typu  $m \times n$  hodnosti  $r$ . Predpokladajme, že  $U$  je rozdelená ako  $U = (U_1|U_2)$ , kde  $U_1$  je typu  $m \times r$ . Ukážte, že  $P = U_1U_1^T$  je matica projekcie na  $\mathcal{R}(A)$  v smere  $\mathcal{N}(A^T)$ . V tomto prípade ide o kolmú projekciu, lebo stĺpcový priestor je kolmý na ľavý nulový. Ako vyzerá matica kolmej projekcie na  $\mathcal{N}(A^T)$  v smere  $\mathcal{R}(A)$ ?

2. (5.11.14) Nech  $A$  je normálna matica, t.j.  $A^T A = AA^T$ , resp.  $A^* A = AA^*$  v komplexnom prípade.

a) Ukážte, že  $\mathcal{R}(A - \lambda I) \perp \mathcal{N}(A - \lambda I)$  pre každý skalár  $\lambda$ .

b) Nech  $\lambda$  a  $\mu$  sú skaláry, pre ktoré sú matice  $A - \lambda I$  a  $A - \mu I$  singulárne – t.j. *vlastné hodnoty* matice  $A$ . Ukážte, že ak  $\lambda \neq \mu$ , potom  $\mathcal{N}(A - \lambda I) \perp \mathcal{N}(A - \mu I)$ .

3. (5.12.1) Nájdite  $SVD$ -rozklad pre maticu

$$C = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}.$$

4. (5.12.2) Ak sú  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r$  nenulové singulárne hodnoty matice  $A$ , potom sa dá ukázať, že funkcia  $\nu_k(A) = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_k^2)^{1/2}$  definuje unitárne invariantnú maticovú normu. Vysvetlite prečo sú indukovaná maticová 2-norma a Frobeniova maticová norma extrémnymi prípadmi v zmysle  $\|A\|_2^2 = \sigma_1^2$  a  $\|A\|_F^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_r^2$ .

5. (5.12.3) Každá zo štyroch bežne používaných maticových noriem  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$ ,  $\|\cdot\|_\infty$  a  $\|\cdot\|_F$  sa dá ohraničiť zhora a zdola konštantným násobkom inej maticovej normy. Teda  $\|A\|_i \leq \alpha \|A\|_j$ , kde  $\alpha$  je zložka na pozícii  $(i, j)$  v nasledujúcej matici.

$$\begin{pmatrix} * & \sqrt{n} & n & \sqrt{n} \\ \sqrt{n} & * & \sqrt{n} & 1 \\ n & \sqrt{n} & * & \sqrt{n} \\ \sqrt{n} & \sqrt{n} & \sqrt{n} & * \end{pmatrix}.$$

Pre analýzu limitného správania preto nehrá úlohu ktorá z maticových noriem sa použije; ide o *ekvivalentné maticové normy*. Zdôvodnite, prečo sú členy pre dvojicu  $(2, F)$  a  $(F, 2)$  v poriadku.

6. (5.12.4) Dokážte, že ak  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r$  sú nenulové singulárne hodnoty matice  $A$  hodnosti  $r$  a  $\|E\|_2 < \sigma_r$ , potom  $h(A + E) \geq h(A)$ .

*Pozn:* Toto tvrdenie hovorí o tom, pre aké malé perturbácie sa už hodnosť matice nemôže znížiť.

7. (5.12.5) *Obraz jednotkovej sféry.* Rozšírenie výsledku zo str. 414 pre singulárne a obdĺžnikové matice je nasledujúce: Ak  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r$  sú nenulové singulárne hodnoty matice  $A$  typu  $m \times n$ , potom obraz  $A(S_2) \subset \mathbb{R}^m$  jednotkovej 2-sféry  $S_2 \subset \mathbb{R}^n$  je elipsoid (prípadne degenerovaný – dimenzie  $r$ ), ktorého  $k$ -ta poloos je  $\sigma_k U_{*k} = AV_{*k}$ , kde  $U_{*k}$  a  $V_{*k}$  sú príslušné ľavé a pravé singulárne vektory matice  $A$ .

8. (5.12.6) Ukážte, že ak je  $\sigma_r$  najmenšia nenulová singulárna hodnota matice  $A_{m \times n}$ , potom

$$\sigma_r = \min_{\substack{\|x\|_2=1 \\ x \in \mathcal{R}(A^T)}} \|Ax\|_2 = 1/\|A^\dagger\|_2.$$

9. (5.12.8) Ukážte, že pre  $|\epsilon| < \sigma_r^2$  ohraňené najmenšou nenulovou singulárnou hodnotou  $\sigma_r$  matice  $A_{m \times n}$  existuje matica  $(A^T A + \epsilon I)^{-1}$  a  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (A^T A + \epsilon I)^{-1} A^T = A^\dagger$ .

10. (5.12.15) Predpokladajme, že  $A = URV^T$  je  $URV$ -rozklad (t.j. môže to byť aj  $SVD$ -rozklad) matice  $A$  typu  $m \times n$  hodnosti  $r$ . Predpokladajme, že  $U$  je rozdelená ako  $U = (U_1|U_2)$ , kde  $U_1$  je typu

$m \times r$ . Ukážte, že  $P = U_1 U_1^T = AA^\dagger$  je matica projekcie na  $\mathcal{R}(A)$  v smere  $\mathcal{N}(A^T)$ . V tomto prípade ide o kolmú projekciu, lebo stĺpcový priestor je kolmý na ľavý nulový. Ako vyzerá matica kolmej projekcie na  $\mathcal{N}(A^T)$  v smere  $\mathcal{R}(A)$ ?

**11.** (5.12.16) Dokážte platnosť nasledujúcich vlastností pseudoinverzie  $A^\dagger$ .

a)  $A^\dagger = A^{-1}$  pre regulárnu (štvorcovú)  $A$ .

b)  $(A^\dagger)^\dagger = A$ .

c)  $(A^\dagger)^T = (A^T)^\dagger$ .

d)  $A^\dagger = \begin{cases} (A^T A)^{-1} A^T & \text{ak } h(A_{m \times n}) = n, \\ A^T (A A^T)^{-1} & \text{ak } h(A_{m \times n}) = m. \end{cases}$

e)  $A^T = A^T A A^\dagger = A A^\dagger A^T$  pre všetky  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ .

f)  $A^\dagger = A^T (A A^T)^\dagger = (A^T A)^\dagger A^T$  pre všetky  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ .

g)  $\mathcal{R}(A^\dagger) = \mathcal{R}(A^T) = \mathcal{R}(A^\dagger A)$  a  $\mathcal{N}(A^\dagger) = \mathcal{N}(A^T) = \mathcal{N}(A A^\dagger)$ .

h)  $(P A Q)^\dagger = Q^T A^\dagger P^T$  ak  $P$  a  $Q$  sú ortogonálne matice, ale vo všeobecnosti  $(AB)^\dagger \neq B^\dagger A^\dagger$ .

i)  $(A^T A)^\dagger = A^\dagger (A^T)^\dagger$  a  $(A A^T)^\dagger = (A^T)^\dagger A^\dagger$ .

**12** (5.12.18) Nech matice  $X, Y \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  spĺňajú  $\mathcal{R}(X) \perp \mathcal{R}(Y)$ .

a) Dokážte Pytagorovu vetu pre matice vzhľadom na Frobeniovu normu

$$\|X + Y\|_F^2 = \|X\|_F^2 + \|Y\|_F^2.$$

b) Nájdite príklad, v ktorom vzťah z časti a) neplatí pre maticovú 2-normu.

c) Ukážte, že  $A^\dagger$  je najbližšou aproximáciou inverznej matice k  $A$  v tom zmysle, že  $A^\dagger$  je maticou s najmenšou Frobeniovou normou spomedzi tých, ktoré minimalizujú vzdialenosť  $\|I - AX\|_F$ .