

Priebežne si prezrite nasledujúce “rámčeky” – prebrané z kapitol 7. a 8. knihy C. D. Meyera, *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. Neoznačené by mali byť známe z LAG I, II. Tie, ktoré sú označené jednou hviezdíčkou \*, asi v prvom ročníku neboli a pravdepodobne sa k nim nedostaneme podrobne ani na prednáške. Tým, ktoré sú označené dvoma hviezdíčkami \*\*, sa ešte budeme venovať.

### Vlastné hodnoty a vlastné vektory

Pre  $n \times n$  maticu  $A$  sa skalár  $\lambda$  a nenulový vektor  $x_{n \times 1}$  spĺňajúce  $Ax = \lambda x$  nazývajú *vlastná hodnota*, resp. *vlastný vektor* matice  $A$ . Množina (rôznych) vlastných hodnôt, označená  $\sigma(A)$ , sa nazýva *spektrum* matice  $A$ .

- $\lambda \in \sigma(A) \iff A - \lambda I$  je singulárna  $\iff \det(A - \lambda I) = 0$ .
- $\{x \neq 0 \mid x \in \mathcal{N}(A - \lambda I)\}$  je množina všetkých vlastných vektorov prislúchajúcich  $\lambda$ . Priestor  $\mathcal{N}(A - \lambda I)$  sa nazýva *vlastný (pod)priestor* matice  $A$ .
- Nenulové riadkové vektory  $y^*$  spĺňajúce  $y^*(A - \lambda I) = 0$  sa nazývajú *ľavé vlastné vektory* matice  $A$ .

### Charakteristický polynóm a charakteristická rovnica

- *Charakteristický polynóm* matice  $A_{n \times n}$  je  $\chi(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ . Stupeň  $\chi(\lambda)$  je  $n$  a vedúci člen  $(-1)^n \lambda^n$ .
- *Charakteristická rovnica* pre maticu  $A$  je  $\chi(\lambda) = 0$ .
- Vlastné hodnoty matice  $A$  sú riešeniami charakteristickej rovnice, teda korene charakteristického polynómu.
- Matica  $A$  má spolu  $n$  vlastných hodnôt, niektoré však môžu byť komplexné (aj ak sú zložky  $A$  reálne) alebo môžu byť niektoré vlastné hodnoty viacnásobné.
- Ak  $A$  obsahuje iba reálne zložky, potom sa jej komplexné vlastné hodnoty musia vyskytovať v združených pároch, t.j. ak  $\lambda \in \sigma(A)$ , aj  $\bar{\lambda} \in \sigma(A)$ .

### \*\* Koeficienty charakteristického polynómu

Ak má charakteristická rovnica matice  $A_{n \times n}$  tvar  $\lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + c_2 \lambda^{n-2} + \dots + c_{n-1} \lambda + c_n = 0$  a ak  $s_k$  označuje  $k$ -ty symetrický polynóm vlastných hodnôt  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , potom

- $c_k = (-1)^k \sum$ (všetky hlavné  $k \times k$  minory),
- $s_k = \sum$ (všetky hlavné  $k \times k$  minory),
- $\text{Tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = -c_1$ ,
- $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = (-1)^n c_n$ .

### \*\* Geršgorinove kruhy

- Všetky vlastné hodnoty matice  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$  sa nachádzajú v množine  $\mathcal{G}_r$  – zjednotení  $n$  Geršgorinových kruhov daných pomocou

$$|z - a_{ii}| \leq r_i, \quad \text{kde} \quad r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \|a_{ij}\| \quad \text{pre } i = 1, 2, \dots, n.$$

- Inými slovami, vlastné hodnoty sú “uväznené” v sade kruhov so stredmi  $a_{ii}$  s polomerami danými súčtami absolútnych hodnôt zložiek v stĺpci  $A_{*i}$  okrem diagonálnej zložky  $a_{ii}$ .
- Navyše, ak zjednotenie  $\mathcal{U}$   $k$ -tich Geršgorinových kruhov nemá prienik so zvyšnými  $n - k$  kruhmi, potom sa v  $k$ -kruhovom  $\mathcal{U}$  nachádza práve  $k$  vlastných hodnôt matice  $A$ , počítajúc s násobnosťami.
  - Keďže  $\sigma(A) = \sigma(A^T)$ , sčítanie absolútnych hodnôt mimodiagonálnych zložiek po riadkoch sa dá nahradiť súčtom po stĺpcoch, teda vlastné hodnoty sa nachádzajú aj v zjednotení kruhov  $\mathcal{G}_c$  daných pomocou

$$|z - a_{ii}| \leq c_j, \quad \text{kde} \quad c_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \|a_{ij}\| \quad \text{pre } j = 1, 2, \dots, n.$$

- Kombináciou riadkového a stĺpcového prístupu dostávame, že vlastné hodnoty matice  $A$  sa nachádzajú v prieniku  $\mathcal{G}_r \cap \mathcal{G}_c$ .

### Podobnosť

- Dve  $n \times n$  matice  $A$  a  $B$  sa nazývajú *podobné*, ak pre ne existuje regulárna matica  $P$  spĺňajúca  $P^{-1}AP = B$ . Súčin  $P^{-1}AP$  sa nazýva *podobnostnou transformáciou* matice  $A$ .
- *Fundamentálny problém*: Pre danú štvorcovú maticu  $A$  nájsť jej najjednoduchší tvar dosiahnuteľný pomocou podobnostných transformácií.

### Diagonalizovateľnosť

- Štvorcová matica  $A$  sa nazýva *diagonalizovateľná*, ak je  $A$  podobná diagonálnej matici.
- *Úplná sada vlastných vektorov* pre  $A_{n \times n}$  je ľubovoľná sada  $n$  lineárne nezávislých vlastných vektorov matice  $A$ ; takáto sada tvorí bázu  $\mathbb{R}^n$ , resp.  $\mathbb{C}^n$ . Nie všetky matice majú úplnú sadu vlastných vektorov; zvyknú sa niekedy nazývať aj ako *defektívne* matice.
- Matica  $A_{n \times n}$  je diagonalizovateľná práve vtedy, keď má úplnú sadu vlastných vektorov. Navyše,  $P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  práve vtedy, keď stĺpce  $P$  tvoria kompletnú sadu vlastných vektorov a  $\lambda_j$  sú príslušné vlastné hodnoty, t.j.  $(\lambda_j, P_{*j})$  tvoria pár vlastnej hodnoty a vlastného vektora pre maticu  $A$ .

### Podobnosť zachováva vlastné hodnoty

Operácie riadkovej redukcie nezachovávajú vlastné hodnoty. Podobné matice však majú rovnaký charakteristický polynóm, a teda aj rovnaké vlastné hodnoty s násobnosťami. *Pozor!* Podobné matice nemusia mať rovnaké vlastné vektory, ich zmena súvisí s maticou podobnosti  $P$ .

### \*\* Schurova veta o triangularizácii

Každá štvorcová matica je unitárne podobná hornej trojuholníkovej matici. To znamená, že pre každú  $A_{n \times n}$  existuje unitárna matica  $U$  (nie jednoznačná) a horná trojuholníková  $T$  (nie jednoznačná) také, že  $U^*AU = T$ . Diagonálne zložky  $T$  sú vlastnými hodnotami  $A$ .

### Násobnosti

Pre  $\lambda \in \sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s\}$  definujeme:

- *Algebraická násobnosť* vlastnej hodnoty  $\lambda$  zodpovedá násobnosti  $\lambda$  ako koreňa charakteristického polynómu  $\chi_A(x)$ . Inými slovami,  $\text{alg mult}_A(\lambda_i) = a_i$  práve vtedy, keď  $(x - \lambda_1)^{a_1} \dots (x - \lambda_s)^{a_s} = 0$  je charakteristickou rovnicou matice  $A$ .
- Ak  $\text{alg mult}_A(\lambda) = 1$ ,  $\lambda$  sa nazýva *jednoduchou* vlastnou hodnotou matice  $A$ .
- *Geometrická násobnosť* vlastnej hodnoty  $\lambda$  je  $\dim \mathcal{N}(A - \lambda I)$ . Inými slovami,  $\text{geo mult}_A(\lambda)$  zodpovedá najväčšiemu počtu lineárne nezávislých vlastných vektorov prislúchajúcich k vlastnej hodnote  $\lambda$ .
- Vlastné hodnoty, pre ktoré  $\text{alg mult}_A(\lambda) = \text{geo mult}_A(\lambda)$ , sa nazývajú *polo-jednoduché* (semisimple) vlastné hodnoty matice  $A$ .

### Nerovnosť násobností

Pre každú maticu  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$  a pre každé  $\lambda \in \sigma(A)$  platí:

$$\text{geo mult}_A(\lambda) \leq \text{alg mult}_A(\lambda).$$

### Lineárna nezávislosť vlastných vektorov

Nech  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$  sú navzájom rôzne vlastné hodnoty matice  $A$ .

- Ak  $\{(\lambda_1, x_1), (\lambda_2, x_2), \dots, (\lambda_k, x_k)\}$  je množina párov vlastná hodnota – vlastný vektor, potom je  $\mathcal{S} = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$  lineárne nezávislá množina.
- Ak je  $\mathcal{B}_i$  bázou  $\mathcal{N}(A - \lambda_i I)$ , potom je  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \dots \cup \mathcal{B}_k$  lineárne nezávislá množina.

### Diagonalizovateľnosť a násobnosti

Matica  $A$  typu  $n \times n$  je diagonalizovateľná práve vtedy, keď

$$\text{geo mult}_A(\lambda) = \text{alg mult}_A(\lambda)$$

pre každé  $\lambda \in \sigma(A)$ , teda práve vtedy, keď je každá jej vlastná hodnota polojednoduchá.

### Rôzne vlastné hodnoty

Ak žiadna z vlastných hodnôt matice  $A$  nie je viacnásobná, potom je  $A$  diagonalizovateľná.  
*Upozornenie!* Opak nemusí platiť.

### \* Spektrálna veta pre diagonalizovateľné matice

Matica  $A_{n \times n}$  so spektrom  $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$  je diagonalizovateľná práve vtedy, ak existujú matice  $\{G_1, G_2, \dots, G_k\}$  spĺňajúce

$$A = \lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 + \dots + \lambda_k G_k,$$

pričom  $G_i$  majú nasledujúce vlastnosti:

- $G_i$  je projekčná matica na  $\mathcal{N}(A - \lambda_i I)$  v smere  $\mathcal{R}(A - \lambda_i I)$ .
- $G_i G_j = 0$  pre  $i \neq j$ .
- $G_1 + G_2 + \dots + G_k = I$ .

Takýto rozklad sa nazýva *spektrálny rozklad matice  $A$*  a  $G_i$  sa nazývajú *spektrálne projektory* prislúchajúce  $A$ .

### \* Jednoduché vlastné hodnoty a projektory

Ak  $x$  a  $y^*$  sú pravé a ľavé vlastné vektory prislúchajúce jednoduchej vlastnej hodnote  $\lambda \in \sigma(A)$ , potom

$$G = \frac{xy^*}{y^*x}$$

je projektor na  $\mathcal{N}(A - \lambda I)$  v smere  $\mathcal{R}(A - \lambda I)$ , teda  $G$  je spektrálny projektor prislúchajúci vlastnej hodnote  $\lambda$ .

### Súhrn diagonalizovateľnosti

Pre  $n \times n$  maticu  $A$  so spektrom  $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$  sú nasledujúce podmienky ekvivalentné:

- $A$  je podobná diagonálnej matici, t.j.  $P^{-1}AP = D$ .
- $A$  má úplnú sadu lineárne nezávislých vlastných vektorov.
- Každá vlastná hodnota  $\lambda_i$  je polojednoduchá, t.j.  $\text{geo mult}_A(\lambda_i) = \text{alg mult}_A(\lambda_i)$ .
- $A = \lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 + \dots + \lambda_k G_k$ , kde
  - ▷  $G_i$  je projektor na  $\mathcal{N}(A - \lambda_i I)$  v smere  $\mathcal{R}(A - \lambda_i I)$ ,
  - ▷  $G_i G_j = 0$  pre  $i \neq j$ ,
  - ▷  $G_1 + G_2 + \dots + G_k = I$ ,
  - ▷  $G_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k (A - \lambda_j I) / \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k (\lambda_i - \lambda_j)$ ,
  - ▷ Ak  $\lambda_i$  je jednoduchá vlastná hodnota, ktorej prislúchajú pravý a ľavý vlastný vektor  $x$ , resp.  $y^*$ , potom  $G_i = xy^*/y^*x$ .

### \*\* Funkcie diagonalizovateľných matíc

Nech  $A = PDP^{-1}$  je diagonalizovateľná matica, v ktorej sú vlastné hodnoty v  $D = \text{diag}(\lambda_1 I, \lambda_2 I, \dots, \lambda_k I)$  zlučené pri opakovaní. Pre funkciu  $f(z)$ , ktorá je definovaná pre každé  $\lambda_i \in \sigma(A)$ , definujeme

$$\begin{aligned} f(A) &= P f(D) P^{-1} = P \begin{pmatrix} f(\lambda_1)I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f(\lambda_2)I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f(\lambda_k)I \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= f(\lambda_1)G_1 + f(\lambda_2)G_2 + \dots + f(\lambda_k)G_k, \end{aligned}$$

kde  $G_i$  je  $i$ -ty spektrálny projektor prislúchajúci vlastnej hodnote  $\lambda_i$ .

### \*\* Nekonečné rady

Ak  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$  konverguje pre  $|z - z_0| < r$  a ak  $|\lambda_i - z_0| < r$  pre každú vlastnú hodnotu diagonalizovateľnej matice  $A$ , potom

$$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (A - z_0 I)^n.$$

Navyše sa dá ukázať, že maticový rad na pravej strane konverguje práve vtedy, keď  $|\lambda_i - z_0| < r$  pre každé  $\lambda_i$ , bez ohľadu na to, či je alebo nie je matica  $A$  diagonalizovateľná. Preto takýto rad slúži ako definícia  $f(A)$  pre funkcie, ktoré sa dajú vyjadriť pomocou Taylorovho radu bez ohľadu na diagonalizovateľnosť matice  $A$ .

### \* Spektrálne projekторы

Ak je  $A$  diagonalizovateľná a  $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ , potom sa dá spektrálny projektor na  $\mathcal{N}(A - \lambda_i I)$  v smere  $\mathcal{R}(A - \lambda_i I)$  vyjadriť ako

$$G_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k (A - \lambda_j I) / \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k (\lambda_i - \lambda_j), \quad \text{pre } i = 1, 2, \dots, k.$$

Následne, ak je  $f(z)$  definovaná na  $\sigma(A)$ , potom  $f(A) = \sum_{i=1}^k f(\lambda_i) G_i$  je nejaký polynóm v  $A$  stupňa najvyššie  $k - 1$ .

### \*\* Diferenciálne rovnice

Ak  $A_{n \times n}$  je diagonalizovateľná so spektrom  $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ , potom riešenie lineárnej diferenciálnej rovnice  $u' = Au$  s počiatočnou podmienkou  $u(0) = c$  sa dá vyjadriť ako

$$u(t) = e^{At} c = e^{\lambda_1 t} v_1 + e^{\lambda_2 t} v_2 + \dots + e^{\lambda_k t} v_k,$$

kde  $v_i$  je vlastný vektor získaný  $i$ -tým spektrálnym projektorom  $G_i$ :  $v_i = G_i c$ .

### \* Stabilita

Majme systém  $u' = Au$ ,  $u(0) = c$ , kde  $A$  je diagonalizovateľná s vlastnými hodnotami  $\lambda_i$ .

- Ak  $\text{Re}(\lambda_i) < 0$  pre každé  $i$ , potom  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{At} = 0$  a  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0$  pre každý počiatočný stav  $c$ . V takomto prípade sa systém  $u' = Au$  nazýva *stabilný systém* a  $A$  sa nazýva *stabilná matica*.
- Ak  $\text{Re}(\lambda_i) > 0$  pre nejaké  $i$ , potom zložky  $u(t)$  môžu byť neohraničené pre  $t \rightarrow \infty$ . V takom prípade hovoríme o *nestabilnom systéme*  $u' = Au$ , resp. *nestabilnej matici*  $A$ .
- Ak  $\text{Re}(\lambda_i) \leq 0$  pre každé  $i$ , potom zložky  $u(t)$  zostávajú ohraničené pre všetky  $t$ , ale môžu oscilovať a nemusia konvergovať k žiadnej limite. Takýto systém sa zvykne nazývať *neutrálne stabilný* (Meyer ho nazýva polo-stabilný).

### \*\* Unitárna diagonalizácia

Matica  $A_{n \times n}$  je unitárne podobná diagonálnej matici (t.j.  $A$  má úplnú sadu ortonormálnych vlastných vektorov) práve vtedy, keď  $A^* A = A A^*$ . Matice spĺňajúce túto rovnosť sa nazývajú *normálne*.

- Ak  $U^* A U = D$ , kde  $U$  je unitárna a  $D$  diagonálna, stĺpce  $U$  tvoria úplnú sadu ortonormálnych vlastných vektorov matice  $A$  a diagonálne zložky matice  $D$  sú príslušné vlastné hodnoty.

### \* Vlastnosti normálnych matíc

Ak  $A$  je normálna matica so spektrom  $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ , tak

- $A$  je tzv. RPN matica – t.j.  $\mathcal{R}(A) \perp \mathcal{N}(A)$  (jej obraz je kolmý na nulový priestor, str. 408)
- Vlastné vektory zodpovedajúce rôznym vlastným hodnotám sú navzájom kolmé, t.j.

$$\mathcal{N}(A - \lambda_i I) \perp \mathcal{N}(A - \lambda_j I) \quad \text{pre } \lambda_i \neq \lambda_j.$$

- Vety o spektrálnej projekcii (str. 517, 526) stále platia, ale spektrálne projekторы  $G_i$  na  $\mathcal{N}(A - \lambda_i I)$  v smere  $\mathcal{R}(A - \lambda_i I)$  sú navyše v tomto prípade *ortogonálnymi* projektorami, lebo  $\mathcal{R}(A - \lambda_i I) \perp \mathcal{N}(A - \lambda_i I)$  pre každé  $\lambda_i$ .

## \*\* Symetrické a hermitovské matice

Okrem vlastností, ktoré majú všetky normálne matice,

- reálne symetrické a hermitovské matice majú reálne vlastné hodnoty,
- $A$  je reálna symetrická práve vtedy, keď je ortogonálne podobná reálnej diagonálnej matici  $D$  – t.j.  $P^T A P = D$  pre nejakú ortogonálnu maticu  $P$ ,
- reálne antisymetrické a antihermitovské matice majú rýdzo imaginárne vlastné hodnoty.

## \* Courantova-Fischerova veta

Vlastné hodnoty  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$  hermitovskej matice  $A_{n \times n}$  spĺňajú

$$\lambda_i = \max_{\dim \mathcal{V}=i} \min_{\substack{x \in \mathcal{V} \\ \|x\|_2=1}} x^* A x \quad \text{a} \quad \lambda_i = \min_{\dim \mathcal{V}=n-i+1} \max_{\substack{x \in \mathcal{V} \\ \|x\|_2=1}} x^* A x.$$

Ak  $i = 1$  v mini-maxovej formuli alebo  $i = n$  v max-minimovej formuli, podpriestor  $\mathcal{V}$  je celé  $\mathbb{C}^n$ , čiže najväčšia a najmenšia vlastná hodnota predstavujú extrémálne hodnoty *Rayleighovho podielu*  $x^* A x / x^* x$ .

## \*\* Singulárne hodnoty a vlastné hodnoty

Pre  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$  hodnoty  $r$  platia nasledujúce tvrdenia:

- Nenulové vlastné hodnoty  $A^* A$  a  $A A^*$  sa rovnajú a sú kladné.
- Nenulové singulárne hodnoty matice  $A$  sú (kladné) odmocniny z nenulových vlastných hodnôt matice  $A^* A$  (a tiež  $A A^*$ ).
- Ak je  $A$  normálna s nenulovými vlastnými hodnotami  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r\}$ , potom nenulové singulárne hodnoty  $A$  sú  $\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_r|\}$ .
- Pravé a ľavé singulárne vektory matice  $A$  sú špeciálne zvolené vlastné vektory matice  $A^* A$ , resp.  $A A^*$ .
- Každá úplná sada ortonormálnych vlastných vektorov  $v_i$  matice  $A^* A$  môže slúžiť ako kompletná sada pravých singulárnych vektorov matice  $A$ , a potom ľavé singulárne vektory sú  $u_i = A v_i / \|A v_i\|_2$ , pre  $i = 1, 2, \dots, r$  a  $\{u_{r+1}, u_{r+2}, \dots, u_m\}$  je nejaká ortonormálna báza  $\mathcal{N}(A^*)$ . Podobne, každá úplná sada ortonormálnych vektorov  $A A^*$  môže poslúžiť ako sada ľavých singulárnych vektorov pre  $A$ , pričom sa príslušné pravé singulárne vektory dodefínujú analogicky.
- Hermitovská matica  $B = \begin{pmatrix} 0_{m \times m} & A \\ A^* & 0_{n \times n} \end{pmatrix}$  typu  $(m+n) \times (m+n)$  má nenulové vlastné hodnoty  $\{\pm\sigma_1, \pm\sigma_2, \dots, \pm\sigma_r\}$ , kde  $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r\}$  sú nenulové singulárne hodnoty matice  $A$ .

### Kladne definitné matice

Pre reálnu symetrickú maticu  $A_{n \times n}$  sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné a každé z nich môže slúžiť ako definícia jej *kladnej definitnosti*.

- $x^T Ax > 0$  pre každý nenulový  $x \in \mathbb{R}^n$  (toto sa spravidla berie ako definícia).
- Všetky vlastné hodnoty matice  $A$  sú kladné.
- $A = B^T B$  pre nejakú regulárnu maticu  $B_{n \times n}$ .
  - ▷ Aj keď takáto  $B$  nie je jednoznačná, existuje jediná *horná trojuholníková* matica  $R$  s kladnou diagonálou spĺňajúca  $A = R^T R$ . Toto je *Choleského faktorizácia* matice  $A$ .
- $A$  má *LU* rozklad (alebo *LDU*), v ktorom sú všetky pivoty kladné.
  - ▷ *LDU* rozklad má tvar  $A = LDU = LDL^T = R^T R$ , kde  $R = D^{1/2} L^T$  je *Choleského faktor* matice  $A$ .
- Vedúce hlavné minory (determinanty ľavých horných podmatíc) matice  $A$  sú kladné.
- Všetky hlavné minory matice  $A$  sú kladné.

Pre hermitovské matice nahraďte transpozíciu  $(\cdot)^T$  hermitovským združením  $(\cdot)^*$  a  $\mathbb{R}$  poľom  $\mathbb{C}$ .

### Kladne semidefinitné matice

Pre reálnu symetrickú maticu  $A_{n \times n}$  s hodnotou  $h(A) = r$  sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné a každé z nich môže slúžiť ako definícia jej *kladnej semi-definitnosti*.

- $x^T Ax \geq 0$  pre každý nenulový  $x \in \mathbb{R}^n$  (toto sa spravidla berie ako definícia).
- Všetky vlastné hodnoty matice  $A$  sú nezáporné.
- $A = B^T B$  pre nejakú maticu  $B$  s  $h(B) = r$ .
- Všetky hlavné minory matice  $A$  sú nezáporné.

### Kvadratické formy

Pre vektor  $x \in \mathbb{R}^n$  a maticu  $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$  sa skalárna funkcia

$$f(x) = x^T Ax = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

nazýva *kvadratická forma*. Kvadratická forma sa nazýva *kladne definitná*, ak  $A$  je kladne definitná matica. Inými slovami,  $f(x)$  je kladne definitná vtedy, keď  $f(x) > 0$  pre  $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ .

### Sylvestrov zákon zotrvačnosti

Nech  $A \cong B$  označuje fakt, že reálne symetrické matice  $A$  a  $B$  sú kongruentné (t.j.  $C^T AC = B$  pre nejakú regulárnu  $C$ ). Sylvestrov zákon zotrvačnosti hovorí:

$A \cong B$  práve vtedy, keď  $A$  a  $B$  majú rovnakú signatúru.

### \* Jordanov tvar nilpotentnej matice

Každá nilpotentná matica  $L_{n \times n}$  indexu  $k$  je podobná blokovo diagonálnej matici

$$P^{-1}LP = N = \begin{pmatrix} N_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & N_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & N_t \end{pmatrix},$$

ktorej každý blok  $N_j$  je nilpotentná matica s jednotkami na prvej vedľajšej diagonále a nulami inde.

- Počet blokov v  $N$  je daný ako  $t = \dim \mathcal{N}(L)$ .
- Veľkosť najväčšieho bloku v  $N$  je  $k \times k$ .
- Počet blokov veľkosti  $i \times i$  v  $N$  je  $\nu_i = r_{i-1} - 2r_i + r_{i+1}$ , kde  $r_i = h(L^i)$ .
- Ak  $\mathcal{B} = \mathcal{S}_{k-1} \cup \mathcal{S}_{k-2} \cup \dots \cup \mathcal{S}_0 = \{b_1, b_2, \dots, b_t\}$  je báza priestoru  $\mathcal{N}(L)$  získaná z do seba vnorených podpriestorov  $\mathcal{M}_i = \mathcal{R}(L^i) \cap \mathcal{N}(L)$ , potom
  - ▷ množina vektorov  $\mathcal{J} = \mathcal{J}_{b_1} \cup \mathcal{J}_{b_2} \cup \dots \cup \mathcal{J}_{b_t}$  obsahujúca všetky Jordanove reťazce so začiatkami v  $b_1, b_2, \dots, b_t$  tvorí bázu  $\mathbb{C}^n$ ;
  - ▷ matica podobnosti  $P_{n \times n} = [J_1 | J_2 | \dots | J_t]$  je regulárna matica obsahujúca ako stĺpce Jordanove reťazce v poradí, v akom sú v  $\mathcal{J}$ .

### Jednoznačnosť Jordanovej štruktúry

Štruktúra Jordanovho tvaru pre nilpotentnú maticu  $L_{n \times n}$  indexu  $k$  je pre maticu  $L$  jednoznačne určená – teda ak je  $L$  podobná blokovo diagonálnej  $B = \text{diag}(B_1, B_2, \dots, B_t)$ , kde každá  $B_i$  má tvar

$$B_i = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon_i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_i & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \epsilon_i \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{pre } \epsilon_i \neq 0,$$

potom musí platiť  $t = \dim \mathcal{N}(L)$  a počet blokov veľkosti  $i \times i$  musí byť  $r_{i-1} - 2r_i + r_{i+1}$ , kde  $r_i = h(L^i)$ .

### Index vlastnej hodnoty

Index vlastnej hodnoty  $\lambda$  matice  $A$  in  $M_{n \times n}(\mathbb{C})$  je definovaný ako index matice  $(A - \lambda I)$ . Inými slovami,  $\text{index}(\lambda)$  je najmenšie kladné celé číslo  $k$  pre ktoré platia nasledujúce ekvivalentné tvrdenia.

- $h((A - \lambda I)^k) = h((A - \lambda I)^{k+1})$ .
- $\mathcal{R}((A - \lambda I)^k) = \mathcal{R}((A - \lambda I)^{k+1})$ .
- $\mathcal{N}((A - \lambda I)^k) = \mathcal{N}((A - \lambda I)^{k+1})$ .
- $\mathcal{R}((A - \lambda I)^k) \cap \mathcal{N}((A - \lambda I)^k) = \{0\}$ .
- $\mathbb{C}^n = \mathcal{R}((A - \lambda I)^k) \oplus \mathcal{N}((A - \lambda I)^k)$ .

Ak  $\mu \notin \sigma(A)$ , definujeme  $\text{index}(\mu) = 0$ .



### Jordanov tvar

Pre každú  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$  s rôznymi vlastnými hodnotami  $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s\}$  existuje regulárna matica  $P$  taká, že

$$P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} J(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J(\lambda_s) \end{pmatrix}.$$

- $J$  má jeden *Jordanov segment* (úsek ?)  $J(\lambda_j)$  pre každú vlastnú hodnotu  $\lambda_j \in \sigma(A)$ .
- Každý segment  $J(\lambda_j)$  je tvorený  $t_j = \dim \mathcal{N}(A - \lambda_j I)$  Jordanovými blokmi:

$$J(\lambda_j) = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_j) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2(\lambda_j) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{t_j}(\lambda_j) \end{pmatrix}, \quad \text{kde } J_*(\lambda_j) = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_j \end{pmatrix}.$$

- Najväčší Jordanov blok v  $J(\lambda_j)$  má veľkosť  $k_j \times k_j$ , kde  $k_j = \text{index}(\lambda_j)$ .
- Počet  $i \times i$  Jordanových blokov v  $J(\lambda_j)$  je daný ako

$$\nu_i(\lambda_j) = r_{i-1}(\lambda_j) - 2r_i(\lambda_j) + r_{i+1}(\lambda_j), \quad \text{kde } r_i(\lambda_j) = h((A - \lambda_j I)^i).$$

- Matica  $J$  sa nazýva *Jordanov tvar* matice  $A$ . Štruktúra tohto tvaru je jednoznačná, teda počet Jordanových segmentov v  $J$ , ako aj počty a veľkosti Jordanových blokov v každom zo segmentov sú určené zložkami  $A$ . Navyše každá matica podobná matici  $A$  má rovnaký Jordanov tvar – t.j.  $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$  sú podobné práve vtedy, keď  $A$  a  $B$  majú rovnaký Jordanov tvar (štruktúru). Matica podobnosti  $P$  obsahujúca reťazce zovšeobecných vlastných vektorov nie je jednoznačná.

### Konštrukcia Jordanových reťazcov

Pre každú  $\lambda \in \sigma(A)$  označme  $\mathcal{M}_i = \mathcal{R}((A - \lambda I)^i) \cap \mathcal{N}(A - \lambda I)$  pre  $i = k - 1, k - 2, \dots, 0$ , kde  $k = \text{index}(\lambda)$ .

- Vytvoríme bázu  $\mathcal{B}$  priestoru  $\mathcal{N}(A - \lambda I)$ .
  - ▷ Začínajúc s ľubovoľnou bázou  $\mathcal{S}_{k-1}$  priestoru  $\mathcal{M}_{k-1}$ , ju postupne rozširujeme množinami  $\mathcal{S}_{k-2}, \mathcal{S}_{k-3}, \dots, \mathcal{S}_0$  tak, aby

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{k-1} & \text{ bola bázou } \mathcal{M}_{k-1}, \\ \mathcal{S}_{k-1} \cup \mathcal{S}_{k-2} & \text{ bola bázou } \mathcal{M}_{k-2}, \\ \mathcal{S}_{k-1} \cup \mathcal{S}_{k-2} \cup \mathcal{S}_{k-3} & \text{ bola bázou } \mathcal{M}_{k-3}, \end{aligned}$$

atď., až pokým nedostaneme bázu  $\mathcal{B} = \mathcal{S}_{k-1} \cup \mathcal{S}_{k-2} \cup \dots \cup \mathcal{S}_0 = \{b_1, b_2, \dots, b_t\}$  pre  $\mathcal{M}_0 = \mathcal{N}(A - \lambda I)$ .

- Vytvoríme Jordanov reťazec začínajúci sa v každom z vlastných vektorov  $b_* \in \mathcal{B}$ .
  - ▷ Pre každý vlastný vektor  $b_* \in \mathcal{S}_i$  riešime  $(A - \lambda I)^i x_* = b_*$  (tento systém je nutne konzistentný, lebo  $b_* \in \mathcal{R}((A - \lambda I)^i)$ ). Reťazec zovšeobecných vlastných vektorov začínajúci v  $b_*$  bude
 
$$P_* = [ (A - \lambda I)^i x_* \mid (A - \lambda I)^{i-1} x_* \mid \dots \mid (A - \lambda I) x_* \mid x_* ]_{n \times (i+1)}.$$
  - ▷ Každá takáto  $P_*$  zodpovedá jednému Jordanovmu bloku  $J_*(\lambda)$  v Jordanovom segmente  $J(\lambda)$  zodpovedajúcejmu  $\lambda$ .
  - ▷ Prvý stĺpec v  $P_*$  je vlastný vektor a nasledujúce stĺpce sú zovšeobecnené vlastné vektory; ich rády postupne narastajú.
- Ak zo všetkých takých  $P_*$  pre dané  $\lambda_j \in \sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s\}$  vytvoríme maticu  $P_j$ , a ak  $P = [P_1 \mid P_2 \mid \dots \mid P_s]$ , potom  $P$  je regulárna matica spĺňajúca  $P^{-1}AP = J = \text{diag}(J(\lambda_1), J(\lambda_2), \dots, J(\lambda_s))$ , t.j. matica  $P$  predstavuje maticu podobnosti medzi  $A$  a jej Jordanovým tvarom  $J$ .

### \* Funkcie Jordanovych blokov

Pre  $k \times k$  Jordanov blok  $J_*$  s vlastnou hodnotou  $\lambda$  a pre funkciu  $f(z)$ , pre ktorú sú definované  $f(\lambda), f'(\lambda), \dots, f^{(k-1)}(\lambda)$ , je  $f(J_*)$  definované ako

$$f(J_*) = f \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \frac{f''(\lambda)}{2!} & \cdots & \frac{f^{(k-1)}(\lambda)}{(k-1)!} \\ & f(\lambda) & f'(\lambda) & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{f''(\lambda)}{2!} \\ & & & f(\lambda) & f'(\lambda) \\ & & & & f(\lambda) \end{pmatrix}.$$

### \* Maticové funkcie

Pre  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$  so spektrom  $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s\}$  označme  $k_i = \text{index}(\lambda_i)$ .

- Funkcia  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  je definovaná (resp. existuje) pre  $A$ , ak  $f(\lambda_i), f'(\lambda_i), \dots, f^{(k_i-1)}(\lambda_i)$  existujú pre každé  $\lambda_i \in \sigma(A)$ .

- Predpokladajme, že  $A = PJP^{-1}$ , kde  $J = \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & J_* & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$  je Jordanov tvar a  $J_*$  reprezentuje rôzne Jordanove bloky. Ak  $f$  existuje pre  $A$ , potom hodnota  $f$  v  $A$  je definovaná ako

$$f(A) = Pf(J)P^{-1} = P \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & f(J_*) & \\ & & \ddots \end{pmatrix} P^{-1}.$$

### \* Spektrálny rozvoj funkcie $f(A)$

Pre  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$  so spektrom  $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s\}$  a indexami  $k_i = \text{index}(\lambda_i)$  a pre funkciu  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , pre ktorú existujú derivácie  $f(\lambda_i), f'(\lambda_i), \dots, f^{(k_i-1)}(\lambda_i)$  pre každé  $\lambda_i \in \sigma(A)$  je hodnota  $f(A)$  rovná

$$f(A) = \sum_{i=1}^s \sum_{j=0}^{k_i-1} \frac{f^{(j)}(\lambda_i)}{j!} (A - \lambda_i I)^j G_i,$$

kde *spektrálne projektory*  $G_i$  spĺňajú

- $G_i$  je projektor na zovšeobecnený vlastný priestor  $\mathcal{N}((A - \lambda_i I)^{k_i})$  v smere  $\mathbb{R}((A - \lambda_i I)^{k_i})$ .
- $G_1 + G_2 + \dots + G_s = I$ .
- $G_i G_j = 0$  ak  $i \neq j$ .
- $N_i = (A - \lambda_i I)G_i = G_i(A - \lambda_i I)$  je nilpotentná s indexom  $k_i$ .
- Pre diagonalizovateľnú  $A$  sa tento rozvoj zhoduje s už skôr popísaným predpisom pre maticovú funkciu diagonalizovateľnej matice.

### \* Konvergenca k nule

Pre  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$  je  $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$  práve vtedy, keď  $\rho(A) < 1$ .

### \* Neumannove rady

Pre  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$  sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné.

- Neumannov rad  $I + A + A^2 + \dots$  konverguje.
- $\rho(A) < 1$ .
- $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$ .

Za týchto podmienok  $(I - A)^{-1}$  existuje a rovná sa  $\sum_{k=0}^{\infty} A^k = (I - A)^{-1}$ .

### \* Lineárne stacionárne iterácie

Nech  $Ax = b$  je lineárny systém s ľubovoľnou štvorcovou maticou.

- *Splitting* (štiepenie?) matice  $A$  je rozklad  $A = M - N$ , pre ktorý existuje  $M^{-1}$ .
- Potom  $H = M^{-1}N$  sa nazýva *iteračná matica*. Tiež zvolíme  $d = M^{-1}b$ .
- Pre počiatočný vektor  $x(0)$  je *lineárne stacionárne iterovanie* reprezentované rekurentným predpisom

$$x(k) = Hx(k-1) + d, \quad \text{pre } k = 1, 2, 3, \dots$$

- Ak  $\rho(H) < 1$ , potom je  $A$  regulárna a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = x = A^{-1}b \quad \text{pre každý počiatočný vektor } x(0).$$

### \* Limity mocnín

Pre  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$  limita  $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k$  existuje práve vtedy, keď

$$\rho(A) < 1$$

alebo

$$\rho(A) = 1, \quad \text{pričom } \lambda = 1 \text{ je jediná vlastná hodnota ležiaca na jednotkovej kružnici a jej index je 1 (t.j. je polojednoduchá)}$$

Ak táto limita existuje,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = \text{projektor na } \mathcal{N}(I - A) \text{ v smere } \mathcal{R}(I - A).$$

### \* Cesàrova sumovateľnosť

- Matica  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$  je cesàrovsky sumovateľná práve vtedy, keď  $\rho(A) < 1$  alebo ak  $\rho(A) = 1$  a každá jej vlastná hodnota ležiaca na jednotkovej kružnici je polojednoduchá.
- Ak existuje, Cesàrova limita

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{I + A + \dots + A^{k-1}}{k} = G$$

predstavuje projektor na  $\mathcal{N}(I - A)$  v smere  $\mathcal{R}(I - A)$ .

- $G \neq 0$  práve vtedy, keď  $1 \in \sigma(A)$ . V tom prípade je  $G$  spektrálny projektor pre  $\lambda = 1$ .
- Ak postupnosť  $\{A^k\}_{k=0}^{\infty}$  konverguje ku  $G$ , potom je  $A$  aj cesàrovsky sumovateľná do  $G$ . Opačné tvrdenie ale neplatí – napr.  $A = -I$ .

### \* Projekторы

Ak je  $M_{n \times n} = B_{n \times r} C_{r \times n}$  ľubovoľná faktorizácia matice  $M$  s hodnotou  $r$  a ak sú priestory  $\mathcal{R}(M)$  a  $\mathcal{N}(M)$  komplementárne v  $\mathbb{C}^n$ , potom projektor na  $\mathcal{R}(M)$  v smere  $\mathcal{N}(M)$  je daný predpisom

$$P = B(CB)^{-1}C,$$

resp.

$$P = U_1(V_1^*U_1)^{-1}V_1, \quad \text{ak sa používa nejaký } URV \text{ rozklad.}$$

Ak  $A$  konverguje alebo je sumovateľná do  $G$  a ak  $I - A = BC$  je faktorizácia s plnou hodnotou, potom

$$G = I - B(CB)^{-1}C,$$

resp.

$$G = I - U_1(V_1^*U_1)^{-1}V_1, \quad \text{ak sa používa nejaký } URV \text{ rozklad.}$$

*Pozn.:* Tieto vzorce sú zovšeobecnením podobného vzorca pre maticu ortogonálnej projekcie  $P = A(A^T A)^{-1}A^T$  na  $\mathcal{R}(A)$  v smere  $\mathcal{N}(A^T) = \mathcal{R}(A)^\perp$ .

### Minimálny polynóm matice

Existuje jediný monický polynóm nulujúci maticu  $A$  najnižšieho stupňa. Takýto polynóm, značený  $m(x)$ , sa nazýva *minimálny polynóm matice  $A$* . Cayley-Hamiltonova veta zaručuje, že  $\deg(m(x)) \leq n$ .

### Vlastnosti minimálneho polynómu

Nech  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$  so spektrom  $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s\}$ .

- Minimálny polynóm matice  $A$  je jediný monický polynóm  $m(x)$  najnižšieho stupňa spĺňajúci  $m(A) = 0$ .
- $m(x) = (x - \lambda_1)^{k_1}(x - \lambda_2)^{k_2} \dots (x - \lambda_s)^{k_s}$ , kde  $k_j = \text{index}(\lambda_j)$ .
- $m(x)$  delí každý polynóm  $p(x)$ , pre ktorý  $p(A) = 0$ . Špeciálne,  $m(x)$  delí charakteristický polynóm  $\chi(x)$ .
- $m(x) = \chi(x)$  práve vtedy, keď  $\text{geo mult}_A(\lambda_j) = 1$  pre každé  $\lambda_j$ . Ekvivalentne,  $\text{alg mult}_A(\lambda_j) = \text{index}(\lambda_j)$  pre každé  $j$ .
- Matica  $A$  je diagonalizovateľná práve vtedy, keď  $m(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \dots (x - \lambda_s)$ , t.j. vtedy, keď je  $m(x)$  súčinom navzájom rôznych lineárnych členov.

### \* Krylovove postupnosti, podpriestory a matice

Pre  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$  a  $0 \neq b \in \mathbb{C}^n$  definujeme:

- $\{b, Ab, A^2b, \dots, A^{j-1}b\}$  sa nazýva *Krylovova postupnosť*.
- $\mathcal{K}_j = \text{span}\{b, Ab, \dots, A^{j-1}b\}$  je *Krylovov podpriestor*.
- $K_{n \times j} = (b|Ab|\dots|A^{j-1}b)$  sa nazýva *Krylovova matica*.

### \* Minimálny polynóm vektora

- *Minimálny polynóm* vektora  $b \in \mathbb{C}^n$  vzhľadom na  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$  je monický polynóm  $v(x)$  najnižšieho stupňa, pre ktorý  $v(A)b = 0$ .
- Ak  $A^k b$  je prvý vektor v Krylovovej postupnosti  $\{b, Ab, A^2b, \dots\}$ , ktorý je lineárnou kombináciou predchádzajúcich Krylovových vektorov, povedzme  $A^k = \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j A^j b$ , potom  $v(x) = x^k - \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j x^j$  (resp.  $v(x) = 1$  pre  $b = 0$ ) je *minimálny polynóm  $b$*  vzhľadom na  $A$ .

### \* Minimálny polynóm ako NSN

Nech  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$  a  $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  je ľubovoľná báza  $\mathbb{C}^n$ . Ak  $v_i(x)$  je minimálnym polynómom  $b_i$  vzhľadom na  $A$ , potom minimálny polynóm  $m(x)$  matice  $A$  je najmenší spoločný násobok polynómov  $v_1(x), v_2(x), \dots, v_n(x)$ .

### \* Pridružená matica polynómu

Pre každý monický polynóm  $p(x) = x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \dots + \alpha_1x + \alpha_0$  je jeho *pridružená matica*:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & -\alpha_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}_{n \times n}.$$

- Polynóm  $p(x)$  je súčasne charakteristickým aj minimálnym polynómom matice  $C$ .

### \*\* Kladná vlastná hodnota a kladný vlastný vektor

Ak  $A_{n \times n} > 0$ , potom platí:

- $\rho(A) \in \sigma(A)$ .
- Ak  $Ax = \rho(A)x$ , potom  $A|x| = \rho(A)|x|$  a  $|x| > 0$ .

Inými slovami, kladná matica  $A$  má (reálnu) vlastnú hodnotu  $\rho(A)$ , ktorej prislúcha kladný vlastný vektor  $v > 0$ .

### \*\* Index $\rho(A)$

Ak  $A_{n \times n} > 0$ , potom platí:

- $\rho(A)$  je jediná vlastná hodnota matice  $A$  na jej spektrálnej kružnici.
- $index(\rho(A)) = 1$ , t.j.  $\rho(A)$  je polo-jednoduchá vlastná hodnota – jej geometrická násobnosť sa rovná algebraickej, a teda zodpovedajúce Jordanove bloky sú veľkosti  $1 \times 1$ .

### \*\* Násobnosť $\rho(A)$

Ak  $A_{n \times n} > 0$ , potom  $alg\ mult_A(\rho(A)) = 1$ . Inými slovami, spektrálny polomer je jednoduchou vlastnou hodnotou matice  $A$ , preto  $\dim \mathcal{N}(A - \rho(A)I) = geo\ mult_A(\rho(A)) = alg\ mult_A(\rho(A)) = 1$ .

### \*\* Žiadne ďalšie kladné vlastné vektory

Pre kladnú maticu  $A_{n \times n} > 0$  neexistuje iný nezáporný vlastný vektor okrem Perronovho vektora a jeho kladných násobkov

### \* Collatzova-Wielandtova veta

Perronov koreň matice  $A_{n \times n} > 0$  maximalizuje výraz  $r = \max_{x \in \mathcal{N}} f(x)$ , kde

$$f(x) = \min_{\substack{1 \leq i \leq n \\ x_i \neq 0}} \frac{[Ax]_i}{x_i} \quad \text{a} \quad \mathcal{N} = \{x \mid x \geq 0 \text{ a } x \neq 0\}.$$

### \*\* Perronova veta

Ak  $A_{n \times n} > 0$  a  $r = \rho(A)$ , potom platí:

- $r > 0$ .
- $r \in \sigma(A)$  ( $r$  sa nazýva Perronov koreň).
- $\text{alg mult}_A(\rho(A)) = 1$ .
- Existuje vlastný vektor  $x > 0$ , pre ktorý  $Ax = rx$ .
- Perronov vektor je jednoznačne určený vektor, spĺňajúci

$$Ap = rp, \quad p > 0, \quad \text{a} \quad \|p\|_1 = 1.$$

Okrem jeho kladných násobkov neexistujú žiadne nezáporné vlastné vektory pre maticu  $A$ , bez ohľadu na vlastnú hodnotu.

- $r$  je jediná vlastná hodnota na spektrálnej kružnici matice  $A$ .
- $r = \max_{x \in \mathcal{N}} f(x)$  (Collatzova-Wielandtova formula),  
kde  $f(x) = \min_{\substack{1 \leq i \leq n \\ x_i \neq 0}} \frac{[Ax]_i}{x_i}$  a  $\mathcal{N} = \{x \mid x \geq 0 \text{ a } x \neq 0\}$ .

### \* Nezáporný vlastný pár

Pre  $A_{n \times n} \geq 0$  s  $r = \rho(A)$  platia nasledujúce tvrdenia.

- $r \in \sigma(A)$ , (aj možnosť  $r = 0$  je prípustná).
- $Az = rz$  pre nejaké  $z \in \mathcal{N} = \{x \mid x \geq 0 \text{ a } x \neq 0\}$ .
- $r = \max_{x \in \mathcal{N}} f(x)$ , kde  $f(x) = \min_{\substack{1 \leq i \leq n \\ x_i \neq 0}} \frac{[Ax]_i}{x_i}$ , (t.j. Collatz-Wielandtova formula naďalej platí).

### \* Reducibilita a grafy

- Matica  $A_{n \times n}$  sa nazýva *reducibilná*, ak existuje permutačná matica  $P$ , pre ktorú

$$P^T A P = \begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{pmatrix}, \quad \text{kde } X \text{ a } Z \text{ sú obe štvorcové.}$$

Inak sa  $A$  nazýva *ireducibilná*.

- $P^T A P$  sa nazýva *symetrická permutácia* matice  $A$ . Dostaneme ju tak, že riadky matice  $A$  vymeníme rovnako ako jej stĺpce.
- Graf  $\mathcal{G}(A)$  matice  $A$  je orientovaný graf s  $n$  vrcholmi  $N_1, N_2, \dots, N_n$ , v ktorom sa nachádza orientovaná hrana z  $N_i$  do  $N_j$  práve vtedy, keď  $a_{ij} \neq 0$ .
- $\mathcal{G}(P^T A P) = \mathcal{G}(A)$  pre ľubovoľnú permutačnú maticu  $P$  – účinok symetrickej permutácie je len prečíslovanie vrcholov grafu.
- $\mathcal{G}(A)$  sa nazýva *silno súvislý*, ak pre každú dvojicu vrcholov  $(N_i, N_k)$  existuje postupnosť orientovaných hrán vedúca z  $N_i$  do  $N_k$ .
- Matica  $A$  je ireducibilná práve vtedy, keď je graf  $\mathcal{G}(A)$  silno súvislý.

### \* Prevod nezápornosti a regularity na kladnosť

Ak je  $A_{n \times n} \geq 0$  ireducibilná, potom  $(I + A)^{n-1} > 0$ .

**\* Perron-Frobeniova veta**

Ak je  $A_{n \times n} \geq 0$  ireducibilná, potom platí:

- $r = \rho(A) \in \sigma(A)$  a  $r > 0$ .
- $\text{alg mult}_A(r) = 1$ .
- Existuje vlastný vektor  $x > 0$ , pre ktorý  $Ax = rx$ .
- *Perronov vektor* je jednoznačne určený vektor, spĺňajúci

$$Ap = rp, \quad p > 0, \quad \text{a} \quad \|p\|_1 = 1.$$

Okrem jeho kladných násobkov neexistujú žiadne nezáporné vlastné vektory pre maticu  $A$ , bez ohľadu na vlastnú hodnotu.

- Platí Collatzova-Wielandtova formula  $r = \max_{x \in \mathcal{N}} f(x)$ ,  
kde  $f(x) = \min_{\substack{1 \leq i \leq n \\ x_i \neq 0}} \frac{[Ax]_i}{x_i}$  a  $\mathcal{N} = \{x \mid x \geq 0 \text{ a } x \neq 0\}$ .

**\* Primitívne matice**

- Nezáporná ireducibilná matica  $A$ , ktorá má jedinú vlastnú hodnotu  $r = \rho(A)$  na svojej spektrálnej kružnici sa nazýva *primitívna*.
- Nezáporná ireducibilná matica  $A$ , ktorá má  $h > 1$  vlastných hodnôt na svojej spektrálnej kružnici sa nazýva *neprimitívna*, číslo  $h$  sa nazýva *index (ne)primitivity*.
- Nezáporná ireducibilná matica  $A$  s  $r = \rho(A)$  je primitívna práve vtedy, keď existuje  $\lim_{k \rightarrow \infty} (A/r)^k$ . V tom prípade

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{A}{r} \right)^k = G = \frac{pq^T}{q^T p} > 0,$$

kde  $p$  a  $q$  sú zodpovedajúce Perronove vektory pre  $A$  a  $A^T$  a  $G$  je spektrálny projektor na  $\mathcal{N}(A - rI)$  pozdĺž  $\mathcal{R}(A - rI)$ .

**\* Wielandtova veta**

Ak  $|B| \leq A_{n \times n}$ , pre  $A$  ireducibilnú, potom  $\rho(B) \leq \rho(A)$ . Ak platí rovnosť t.j.  $\mu = e^{i\phi} \rho(A) \in \sigma(B)$  pre nejaké  $\phi$ , potom

$$B = e^{i\phi} D A D^{-1} \quad \text{pre nejakú diagonálnu maticu} \quad D = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & & \\ & e^{i\theta_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{i\theta_n} \end{pmatrix},$$

a naopak.

**\*  $h$ -te odmocniny z  $\rho(A)$  na spektrálnej kružnici**

Ak je  $A_{n \times n} \geq 0$  ireducibilná a má  $h$  vlastných hodnôt  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_h\}$  na spektrálnej kružnici, potom platia nasledujúce tvrdenia.

- $\text{alg mult}_A(\lambda_k) = 1$  pre  $k = 1, 2, \dots, h$ .
- Fázy vlastných hodnôt  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_h\}$  zodpovedajú  $h$ -tým odmocninám z jednotky, t.j. pre  $r = \rho(A)$  sú dané ako

$$\{r, r\omega, r\omega^2, \dots, r\omega^{h-1}\}, \quad \text{kde} \quad \omega = e^{2\pi i/h}.$$

### \* Rotačná invariancia

Ak je matica  $A$  neprimitívna s  $h$  vlastnými hodnotami na spektrálnej kružnici, potom spektrum  $\sigma(A)$  je invariantné vzhľadom na rotáciu o uhol  $2\pi/h$  okolo počiatku. Žiadna rotácia o uhol menší ako  $2\pi/h$  nemôže zachovávať  $\sigma(A)$ .

### \* Frobeniov test primitivity

$A \geq 0$  je primitívna práve vtedy, keď  $A^m > 0$  pre nejaké  $m > 0$ .

### \* Index neprimitivity

Ak je  $c(x) = x^n + c_{k_1}x^{n-k_1} + c_{k_2}x^{n-k_2} + \dots + c_{k_s}x^{n-k_s} = 0$  charakteristická rovnica neprimitívnej matice  $A_{n \times n}$ , v ktorej sú vyznačené iba nenulové koeficienty (t.j.  $c_{k_j} \neq 0$  a  $n > (n - k_1) > \dots > (n - k_s)$ ), potom je index neprimitivity  $h$  najväčší spoločný deliteľ  $k_1, k_2, \dots, k_s$ .

### \* Frobeniov tvar

Pre každú neprimitívnu maticu  $A$  s indexom neprimitivity  $h > 1$  existuje permutačná matica  $P$  taká, že

$$P^T A P = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & A_{h-1,h} \\ A_{h1} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

kde nulové bloky na diagonále sú štvorcové.

### \* Ireducibilné markovovské reťazce

Nech  $P$  je matica pravdepodobností prechodu pre ireducibilný markovovský reťazec so stavmi  $\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ , t.j.  $P$  je ireducibilná  $n \times n$  stochastická matica. Označme  $\pi^T$  ľavostranný Perronov vektor pre  $P$ . Nasledujúce tvrdenia platia pre ľubovoľnú počiatočnú distribúciu  $p^T(0)$ .

- Matica prechodu o  $k$  krokov je  $P^k$ , lebo zložka  $(i, j)$  v  $P^k$  určuje prechod zo stavu  $S_i$  do stavu  $S_j$  na  $k$  krokov.
- Vektor distribúcie po  $k$  krokoch je daný ako  $p^T(k) = p^T P^k$ .
- Ak je  $P$  primitívna a ak  $e$  označuje stĺpcový vektor samých jednotiek, potom

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P^k = e\pi^T \quad \text{a} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} p^T(k) = \pi^T.$$

- Ak je  $P$  neprimitívna, potom

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{I + P + \dots + P^{k-1}}{k} = e\pi^T$$

a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[ \frac{p^T(0) + p^T(1) + \dots + p^T(k-1)}{k} \right] = \pi^T.$$

- Bez ohľadu na to, či je  $P$  primitívna alebo neprimitívna,  $j$ -ta zložka  $\pi_j$  vektora  $\pi^T$  reprezentuje dlhodobý priemer podielu času, v ktorom sa systém nachádza v stave  $S_j$ .
- $\pi^T$  sa často nazýva *vektor stacionárnej distribúcie* reťazca, lebo to je jediný distribučný vektor spĺňajúci  $\pi^T P = \pi^T$ .



### \* Jednotkové vlastné hodnoty

Jednotkové vlastné hodnoty stochastickej matice sú tie, ktoré ležia na jednotkovej kružnici. Pre každú stochastickú maticu  $P$  platí

- Každá jednotková vlastná hodnota matice  $P$  je polojednoduchá.
- Každá jednotková vlastná hodnota má tvar  $\lambda = e^{2k\pi i/h}$  pre nejaké  $k < h \leq n$ .
- Špeciálne,  $\rho(P) = 1$  je vždy polojednoduchá vlastná hodnota matice  $P$ .

### \* Sumovateľnosť stochastických matíc

Každá stochastická matica  $P$  je cesàrovsky sumovateľná, t.j.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{I + P + \dots + P^{k-1}}{k} \quad \text{existuje pre každú stochastickú maticu } P$$

a hodnota limity je spektrálny projektor  $G$  na  $\mathcal{N}(I - P)$  pozdĺž  $\mathcal{R}(I - P)$ .

### \* Reducibilné markovovské reťazce

Ak stavy v reducibilnom markovovskom reťazci boli usporiadané tak, že matica pravdepodobností prechodu má kanonický tvar

$$P = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11} & \dots & P_{1r} & P_{1,r+1} & \dots & P_{1m} \\ & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & P_{rr} & P_{r,r+1} & \dots & P_{rm} \\ & & & P_{r+1,r+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & P_{mm} \end{pmatrix}$$

a ak  $\pi_j^T$  sú ľavostranné Perronove vektory pre  $P_{jj}$ , ( $r+1 \leq j \leq m$ ), potom  $I - T_{11}$  je regulárna a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{I + P + \dots + P^{k-1}}{k} = \begin{pmatrix} 0 & (I - T_{11})^{-1} T_{12} E \\ 0 & E \end{pmatrix},$$

kde

$$E = \begin{pmatrix} e\pi_{r+1}^T & & \\ & \ddots & \\ & & e\pi_m^T \end{pmatrix}.$$

Navyše,  $\lim_{k \rightarrow \infty} P^k$  existuje práve vtedy, keď sú všetky stochastické matice  $P_{r+1,r+1}, \dots, P_{mm}$  primitívne. V tom prípade

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P^k = \begin{pmatrix} 0 & (I - T_{11})^{-1} T_{12} E \\ 0 & E \end{pmatrix}.$$