4.3

Ak je $A\cancel{x}=b$ konzistentný a má práve jedno riešenie $(h(A)=n)$

$\Leftrightarrow$ $N(A)=\{\vec{0}\}$ a $b\in R(A)$

v tom prípade aj $A^TAx=A^Tb$ má práve jedno riešenie $\Leftrightarrow$ $N(A^TA)=\{\vec{0}\}$ $\Leftrightarrow$ $\exists\,(A^TA)^{-1}$

preto $x=(A^TA)^{-1}A^Tb$.

Pozor!! Ak je A obdĺžniková matica $(A^TA)^{-1}\neq A^{-1}(A^T)^{-1}$ sa nedá ísť lebo s exponentom $^{-1}$ dovnútra!

Zhrnutie: Normálne rovnice

- Pre $m\times n$ systém $Ax=b$ máme asociovaný $n\times n$ systém normálnych rovníc $A^TAx=A^Tb$
- $A^TAx=A^Tb$ je vždy konzistentný (aj keď $Ax=b$ nie je)
- Ak $Ax=b$ je konzistentný, množiny riešení $Ax=b$ a $A^TAx=A^Tb$ sú totožné
- Ak $Ax=b$ je nekonzistentný $(b\notin R(A))$, potom ~~tieto~~ riešenia tvoria riešenie $Ax=b$ v najmenších štvorcoch $A^TAx=A^Tb$
- $A^TAx=A^Tb$ má jednoznačné riešenie práve vtedy, keď $h(A)=n$, potom $x=(A^TA)^{-1}A^Tb$
- Ak je $Ax=b$ konzistentný s ~~pra~~ jednoznačným riešením, tak to platí aj pre $A^TAx=A^Tb$, riešenie: $x=(A^TA)^{-1}A^Tb$.

Pozor! ~~Najm~~ Metóda najmenších štvorcov vyzerá byť veľmi priateľská.

Ale (ako uvidíme)

$$\|A^TA\| \approx \|A\|^2$$

$$\|(A^TA)^{-1}\| \approx \|A^{-1}\|^2$$

(toto nie je pre obdĺž. definované)

takže pre $\kappa_A = \|A\|\|A^{-1}\|$ máme $\kappa_{A^TA} \approx \kappa_A^2$.

Príklad (DÚ)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2{,}01 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 9 \\ 3{,}01 \end{pmatrix}$$

riešiť $Ax=b$ v 3-číslicovej aritmetike

$$"A^TA = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 20 & 40 \end{pmatrix} \qquad A^Tb = \begin{pmatrix} 30 \\ 60{,}1 \end{pmatrix}$$

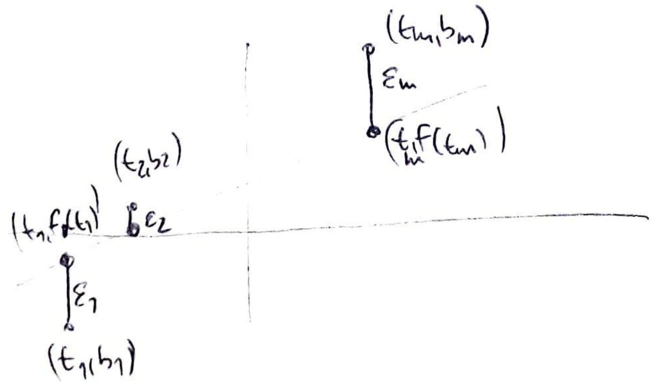
→ prax ~~výpočte~~: normálnym rovniciam sa numerika vyhýba.

↳ metódu najmenších štvorcov (ktorá je ~~do~~ veľmi dôležitá) treba vylepšiť. → QR rozklad

Prečo najmenšie štvorce?

pozorovania v čase (t_i)

Dáta: $D = \{(t_1,b_1),(t_2,b_2),\dots,(t_m,b_m)\}$ – chceme nájsť lineárnu krivku – priamku, ktorá im bude najlepšie zodpovedať.



→ $f(t) = \alpha + \beta t$

→ chybový vektor $\varepsilon_i = |f(t_i) - b_i| = |\alpha + \beta t_i - b_i|$

nájsť α, β také, aby $\sum \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{m} (\alpha + \beta t_i - b_i)^2$ bolo minimálne.

→ minimum → treba parciálne derivácie a kritický bod

$$0 = \frac{\partial\left(\sum_{i=1}^{m}(\alpha+\beta t_i-b_i)^2\right)}{\partial\alpha} = 2\sum_{i=1}^{m}(\alpha+\beta t_i-b_i)$$

$$0 = \frac{\partial\left(\sum_{i=1}^{m}(\alpha+\beta t_i-b_i)^2\right)}{\partial\beta} = 2\sum_{i=1}^{m}(\alpha+\beta_i-b_i)t_i$$

→ to dá sústavu dvoch rovníc o dvoch neznámych:

$$\left(\sum_{i=1}^{m}1\right)\alpha + \left(\sum_{i=1}^{m}t_i\right)\beta = \sum_{i=1}^{m}b_i$$

$$\left(\sum_{i=1}^{m}t_i\right)\alpha + \left(\sum_{i=1}^{m}t_i^2\right)\beta = \sum_{i=1}^{m}t_ib_i$$

Resp. pre $x=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1 & t_1\\ 1 & t_2\\ \vdots & \vdots\\ 1 & t_m\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}$

tieto rovnice zodpovedajú presne $A^TA\,x = A^Tb$. – normálne rovnice pre systém $Ax=b$.

→

riešenie: $x = (A^TA)^{-1}A^Tb$ (pre 2x2 maticu $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$)

$$= \frac{1}{m\sum t_i^2-(\sum t_i)^2}\begin{pmatrix}\sum t_i^2 & -\sum t_i\\ -\sum t_i & m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sum b_i\\ \sum t_ib_i\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{m\sum t_i^2-(\sum t_i)^2}\begin{pmatrix}\sum t_i^2\sum b_i - \sum t_i\sum t_ib_i\\ m\sum t_ib_i - \sum t_i\sum b_i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}.$$

Pričom chyba je daná ako:

$$\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{m}(\alpha+\beta t-b_i)^2 = (Ax-b)^T(Ax-b)$$

4.5 (52)

$e_i^T A^+ = (A^T)_{i*}$ ← je i-ty riadok A^T

máme rovníc $(A^T)_{i*} Ax = (A^T)_{i*} b$

spojením:
$$A^TAx = A^Tb.$$

Analýza dáva iba nutnú podmienku → x je minimum ⇒ x je krit. bod ⇕ x rieši $A^TAx = A^Tb$.

Chceme ukázať, že každé riešenie $A^TAx = bx$ zodpovedá minimu.

Nech z je riešením $A^TAx = A^Tb$.

$z^TA^Tb - z^TA^Tb$

potom $\underbrace{f(z)=}_{\text{hodnota chyby v } z \text{ je:}}$ $(Az-b)^T(Az-b) = z^TA^TAz - 2z^TA^Tb + b^Tb$

$= b^Tb - z^TA^Tb.$

pre iné $y = z+u$ máme:

$$f(y) = (Ay-b)^T(Ay-b) = (Az+Au-b)^T(Az+Au-b)$$

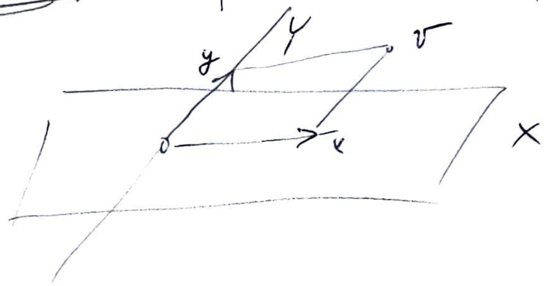
$$= \cancel{Az}\ \cancel{z^TA^TAz}\ (Az-b)^T(Az-b) \underbrace{- 2u^TA^T(Az-b)}_{=0} + u^TA^TAu$$

$- A(z^TA^T - b^T)Au$

$$= f(z) + \|Au\|^2$$

→ t.j. $f(y) \geq f(z)$, rovnosť práve vtedy, keď $Au = \vec{0}$ ⇕ $u \in N(A) = N(A^TA)$

5.9 ① komplementárne podpriestory / šikmá projekcia 5.3



- Nech $X+Y=V$ a $X\cap Y=\{\vec{0}\}$.

→ t.j. $V=X\oplus Y$.

potom každý vektor $v\in V$ sa dá jednoznačne zapísať ako $v=x+y$.

Podpriestory $X,Y\subseteq V$ sa nazývajú komplementárne

$V=X+Y$ $\quad X\cap Y=\{\vec{0}\}$.

→ V je priamy súčet X,Y.

Projekcia Nech $V=X\oplus Y$, Potom pre každé $v\in V$ existujú jednoznačné $x\in X$ a $y\in Y$ také, že $v=x+y$.

• Nazveme x projekcia v na X pozdĺž Y

y projekcia v na Y pozdĺž X.

Ak $X\perp Y$, potom toto je kolmá projekcia, vo všeobecnosti máme šikmú projekciu.

Ako projekciu nájsť? (pre $X\oplus Y=\mathbb{R}^n$) Chceme nájsť projektor (projekčný operátor) $P:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, ~~ktorý~~ tak aby Pv bola projekcia v na X pozdĺž Y.

Nech $B_X=\{x_1,x_2,\dots,x_r\}$, $B_Y=\{y_1,\dots,y_{n-r}\}$ sú bázy X a Y.

→ máme maticu

$$B_{n\times n} = \left[\begin{array}{cccc|ccc} | & | & & | & | & & | \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_r & y_1 & \cdots & y_{n-r} \\ | & | & & | & | & & | \end{array}\right] = [\underset{n\times r}{X} \,|\, \underset{n\times(n-r)}{Y}]$$

- B je regulárna ($B_X \cup B_Y$ tvorí bázu $\mathbb{R}^n$)

· Chceme $Px_i = x_i$ pre $i=1,\dots,r$

$Py_j = 0$ pre $j=1,\dots,n-r$.

Preto $PB = P[X|Y] = [PX|PY] = [X|0]$

P teda $P = [X|0]B^{-1} = B\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)B^{-1}$.

Overme, že naozaj ide o projekciu:

nech: $x = Pv$ a $y = (I-P)v$

potom $x = Pv = [X|0]B^{-1}v \in R(X) = \mathcal{X}$

$y = (I-P)v = \left(B\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & I_{n-r} \end{array}\right)\right)B^{-1}v = [0|Y]B^{-1}v \in R(Y) = \mathcal{Y}$

~~teď~~ a $v = x+y = Pv + (I-P)v = Iv$

→ máme rozklad.

Mohlo by sa stať, že by sme nejako získali inú projekčnú maticu? → Nie.

musí platiť: $P_iB = P_i[X|Y] = [P_iX|P_iY] = [X|0]$

$\to P_1B = P_2B \to P_1 = P_2$.

5.9. (2) Preto existuje jediný projektor na X pozdĺž Y.

→ komplementárny projektor (doplnkový)
$$Q = I - P = [0 \mid Y] B^{-1} = B \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix} B^{-1}.$$

Súhrn Ak sú $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ komplementárne podpriestory vo V

tak každé $v \in V$ sa dá jednoznačne rozložiť ako

$$v = x + y \qquad x \in \mathcal{X},\ y \in \mathcal{Y}.$$

Jednoznačne daný operátor $P : V \to V$, projektor, ~~má vlastnosti~~ : na $\mathcal{X}$ pozdĺž $\mathcal{Y}$. má vlastnosť.

- $P^2 = P$
- $I - P$ je komplementárny projektor $\mathcal{Y}$ na $\mathcal{X}$
- $\mathcal{R}(P) = \{ x \mid Px = x \}$ ← množina fixných bodov
- $\mathcal{R}(P) = \mathcal{N}(I - P) = \mathcal{X} \qquad \mathcal{R}(I-P) = \mathcal{N}(P) = \mathcal{Y}$
- Ak $V = \mathbb{R}^n$ (alebo $\mathbb{C}^n$) P je daný

$$P = [X \mid 0][X \mid Y]^{-1} = [X \mid Y] \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} [X \mid Y]^{-1}$$

kde stĺpce X a Y sú bázy $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$.

Idempotencia $\quad Pv = x$, potom

$$P^2 v = P(Pv) = Px \underset{\substack{\uparrow \\ x \text{ je fixovaný}}}{=} x = Pv. \quad \text{pre } \forall v.$$

Jordanov tvar, vzhľadom na vhodnú bázu