5.9. (2) Prečo existuje jediný projektor na X pozdĺž Y.

→ komplementárny projektor (doplnkový)

$$Q = I - P = [0 \mid Y] B^{-1} = B \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix} B^{-1}.$$

<u>Súhrn</u> Ak sú $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ komplementárne podpriestory v $\mathcal{V}$

tak každé $v \in \mathcal{V}$ sa dá jednoznačne rozložiť ako

$v = x + y \qquad x \in \mathcal{X},\ y \in \mathcal{Y}.$

Jednoznačne daný operátor $P : V \to V$, projektor, ~~má vlastnosti~~ : na $\mathcal{X}$ pozdĺž $\mathcal{Y}$. má vlastnosti.

- $P^2 = P$
- $I - P$ je komplementárny projektor $\mathcal{Y}$ na $\mathcal{X}$
- $\mathcal{R}(P) = \{ x \mid Px = x \}$ ← množina fixných bodov
- $\mathcal{R}(P) = \mathcal{N}(I - P) = \mathcal{X} \qquad \mathcal{R}(I-P) = \mathcal{N}(P) = \mathcal{Y}$
- Ak $V = \mathbb{R}^n$ (alebo $\mathbb{C}^n$) P je daný

$$P = [X \mid 0][X \mid Y]^{-1} = [X \mid Y] \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} [X \mid Y]^{-1}$$

kde stĺpce X a Y sú bázy $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$.

Idempotencia $\qquad Pv = x$, potom

$$P^2 v = P(Pv) = Px \underset{\substack{\uparrow \\ x \text{ je fixovaný}}}{=} x = Pv. \qquad \text{pre } \forall v.$$

Jordanov tvar, vlastné hodnoty na vhodnej báze

• Ako to bude pre kolmé priestory?

Nech stĺpce M a N tvoria bázu $\mathcal{M}$ a $\mathcal{M}^\perp$

• kolmosť dáva $N^T \cdot M = 0$, $M^T \cdot N = 0$

ak $\dim \mathcal{M} = r$, tak M^TM je $r \times r$ matica

$h(M^TM) = h(M) = r \Rightarrow M^TM$ je regulárna (minule)

ak stĺpce v N zvolíme ortonormálne ($N^TN = I_{n-r}$)

potom
$$\left(\begin{array}{c} (M^TM)^{-1}M^T \\ \hline N^T \end{array}\right)(M|N) = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{(M^TM)^{-1}M^TM}_{I} & \underbrace{(M^TM)^{-1}M^TN}_{0} \\ \hline \underbrace{N^TM}_{0} & \underbrace{N^TN}_{I} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & I \end{array}\right)$$

Teda $(M|N)^{-1} = \left(\begin{array}{c} (M^TM)^{-1}M^T \\ \hline N^T \end{array}\right)$

• projekcia na $\mathcal{M}$ má tvar:

$$\boxed{P_M = (M|0)\left(\begin{array}{c} (M^TM)^{-1}M^T \\ \hline N^T \end{array}\right) = \left(M(M^TM)^{-1}M^T\right)}$$

– projektor nezávisí od voľby, teda vzorec nezávisí od matice M. (pokiaľ jej stĺpce tvoria bázu $\mathcal{M}$)

– Teda stĺpce M ~~nežia~~ nemusia byť ortonormálne.

(ale ak sú, je to fajn, lebo $M^TM = I$ a $P_M = MM^T$)

→ potom aj $(M|N)$ je ortog. matica U: $P_M = U\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^T$ (str. 430)

Minule sme skončili tým, že sme pre $\mathcal{R}(M)=\mathcal{M}$ a $\mathcal{R}(N)=\mathcal{M}^\perp$ našli ~~p~~ maticu projekčného operátora:

$$P_{\mathcal{M}} = M(M^TM)^{-1}M^T$$

(ak sú stĺpce M ortonormálne. $P_{\mathcal{M}} = MM^T$) $= U\left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & 0\end{array}\right)U^T$)

$\wedge$ symetrická

Tiež sme videli, že P je šikmým projektorom ak

$$P = B\left(\begin{array}{c|c} I & \\ \hline & 0\end{array}\right)B^{-1} \qquad P^2=P$$

Ako teda rozlíšiť kolmé projekcie od šikmých?

- **Tvrdenie.** Lineárny operátor P na V je $\overset{(\text{šikmý})}{\text{projektor}}$ $\Leftrightarrow P^2=P$

D: (idem. $\Rightarrow$ sme ukázali minule)

($\Leftarrow$) Nech $P^2=P$. Potom $\mathcal{R}(P) = \mathcal{N}(P)$ sú komplementárne podpriestory, lebo $\forall v\in V$: $v = Pv + (I-P)v$

pričom $Pv \in \mathcal{R}(P)$ a $(I-P)v \in \mathcal{N}(P)$

$(\; P(I-P)v = (P-P^2)v = 0v = 0\;)$.

preto $\mathcal{R}(P) \dotplus \mathcal{N}(P) = V$ ale ich prienik je triviálny : $x\in\mathcal{R}(P)\cap\mathcal{N}(P) \Rightarrow x = Py$ a $Px=0$

$\rightarrow \exists y \quad x = Py \overset{\text{idem}}{=} P^2y = P(Py) = 0.$

t.j. P je naozaj projektor na $\mathcal{R}(P)$ ~~podľa~~ (v smere) $\mathcal{N}(P)$

Pozn. $P^2=P \Rightarrow$ vl. hodnoty spĺňajú $\lambda^2=\lambda \Rightarrow \lambda = 0,1$

tiež minimálny polynóm je $x(x-1) \rightarrow$ bloky veľkosti 1.

Kolmé projekcie

Nech P je projektor ($\text{t.j. } P^2=P$). Potom nasl. je ekviv.

- $\mathcal{R}(P) \perp \mathcal{N}(P)$
- $P^T = P$ (t.j. ort. projektor spĺňa: $P^2 = P = P^T$)

D 1. je definícia ort. projektora (lebo P je projekcia na $\mathcal{R}(P)$ v smere $\mathcal{N}(P)$).

Z vyjadrenia $P = M(M^TM)^{-1}M^T$ máme:

$P^T = M\left((M^TM)^{-1}\right)^T M^T$, lebo M^TM je symetrická, teda aj $(M^TM)^{-1}$ je.

Ak je P symetrický, potom $\mathcal{R}(P) = \mathcal{R}(P^T)$
stĺp = riad.

lenže vieme $\mathcal{R}(P^T) \perp \mathcal{N}(P)$.

Veta o najbližšom bode →

62

Veta o najbližšom bode

Nech M je podpriestor euklidovského priestoru V, $b \in V$.

Najbližší (jednoznačne daný) vektor p z M ku b je

$p = P_M b$ – ortogonálna (kolmá) projekcia b na M.

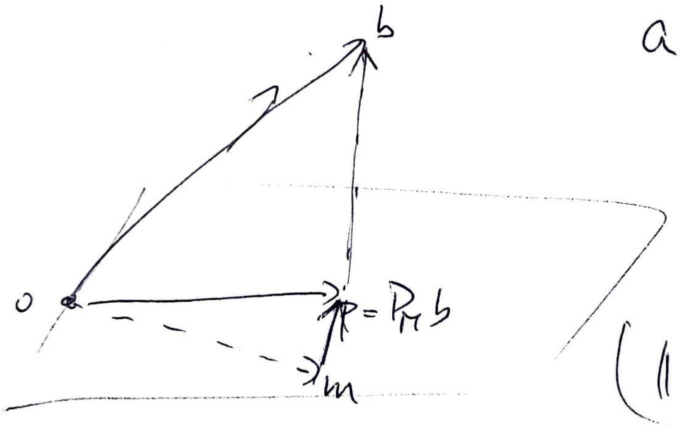
T.j. $\min_{m \in M} \|b - m\|_2 = \|b - P_M b\|_2 = d(b, M)$.

→ minimum sa nazýva (kolmá) vzdialenosť b od M.

Dôkaz potrebujeme dokázať jednoznačnosť.

Nech $p = P_M b$, $\in M$.. Potom $p - m \in M$

a $b - p = (I - P_M) b \in M^\perp$



Teda $p - m \perp b - p$.

Pytagorova veta potom dá:

$(\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ ak $x \perp y)$

$$\|b - m\|_2^2 = \|b - p + p - m\|_2^2 = \|b - p\|^2 + \|p - m\|^2 \geq \|b - p\|_2^2$$

Teda $\min_{m \in M} \|b - m\|_2^2 = \|b - p\|_2^2$. (min. sa nadobúda v p.)

Jednoznačnosť: nech $\|b - \hat{m}\|_2^2 = \|b - p\|_2^2$

potom opäť z Pyt. vety:

$$\|b - \hat{m}\|_2^2 = \|b - p\|_2^2 + \|p - \hat{m}\|_2^2 \Rightarrow \|p - \hat{m}\|_2^2 = 0 \Rightarrow p = \hat{m}.$$

∎

· ~~Existencia projekčného operátora~~

~~Nech $v \in V$, $v = m + n$ pre $m \in M$ a $n \in M^\perp$~~

~~• m sa nazýva kolmou (ortogonálnou) projekciou v do M.~~

~~• zobrazenie projekcie, projektor, P_M na M pozdĺž $M^\perp$~~

~~sa nazýva kolmá projekcia (projektor) na M.~~

~~• P_M je jediné lineárne zobrazenie spĺňajúce $P_M v = m$.~~

→ Ako nájsť P?

Môžeme sa teraz pozrieť na najmenšie štvorce opäť:

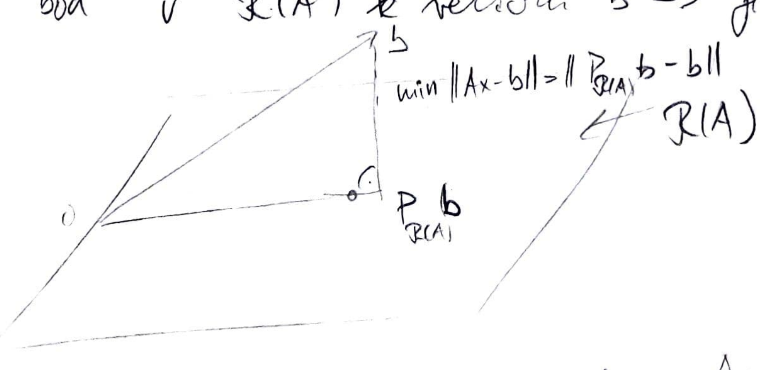
- úloha pre $A_{m \times n} x = b$ nájsť x minimalizujúci veľkosť chyby

$$(Ax-b)^T(Ax-b) = \|Ax-b\|_2^2$$

→ minule sme potrebovali analýzu a parciálne derivácie, aby sme sa dostali k normálnym rovniciam $A^TAx = A^Tb$.

Minimalizovať $\|Ax-b\|^2$ je to isté ako minimalizovať $\|Ax-b\|$. ($\xrightarrow{\text{z def. } \|\cdot\|}$)

→ čo to ale znamená? $Ax \in R(A)$, teda hľadáme najbližší bod v $R(A)$ k vektoru b → jeho kolmú projekciu. $P_{R(A)} b$.



Takže hľadáme takú x aby $Ax = P_{R(A)} b$.

Lenže tento systém je ekvivalentný normálnym rovniciam, lebo:

$$
\begin{aligned}
Ax = P_{R(A)} b \iff & P_{R(A)} A x = P_{R(A)} b \\
\iff & P_{R(A)} (Ax - b) = 0 \\
\iff & Ax - b \in N(P_{R(A)}) = R(A)^{\perp} = N(A^T) \\
\iff & A^T (Ax - b) = 0 \\
\iff & A^T A x = A^T b.
\end{aligned}
$$

---

na cvičeniach sme videli, že $x = A^{+} b$ je čiastkové riešenie ~~...~~ v najmenších štvorcoch, preto máme: a $S = N(A) + A^{+} b$ všetk.

Pozn.: Klasický (analytický) prístup sa nezovšeobecňuje ľahko z reálneho do komplexného, ale pre projekcie je jasné, čo robiť – nahradiť T, $*$

Riešenia v najmenších štvorcoch.

Nasl. 4 tvrdenia sú ekvivalentné tomu, že $\hat{x}$ je riešením (možno nekonzist.) systému $Ax = b$ v najm. štvorcoch:

- $\|A\hat{x} - b\| = \min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|$
- $A\hat{x} = P_{R(A)} b$
- $A^T A \hat{x} = A^T b$ (rozš. $A^* A \hat{x} = A^* b$ pre $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$)
- $\hat{x} \in A^{+} b + N(A)$.

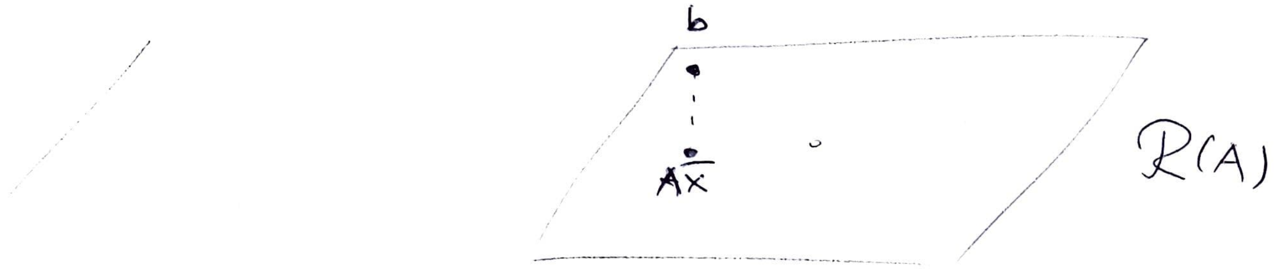
Tieto zápisy sú vhodné z teoretického hľadiska, ale (ako sme videli) majú problém v pohyblivej desatinnej čiarke.

$\Rightarrow$ riešenie $A^T A x = A^T b$ alebo hľadanie A^{+}, resp. $N(A)$ môže byť numericky nestabilné.

Najmenšie štvorce ako kolmá projekcia

preskočiť

pozrime sa na geometrický význam najmenších štvorcov:



pre pravú stranu b ~~$\notin \mathcal{R}(A)$~~ hľadáme $\hat{x}$ tak, aby $\|A\hat{x}-b\|_2$ bolo minimálne.
ale to je to isté, ako $\|A\hat{x}-b\|_2^2$ je minimálne.

→ geometria: $A\hat{x}-b \perp \mathcal{R}(A)$

→ teda $A\hat{x}-b \in \mathcal{N}(A^T)$

$$A^T(A\hat{x}-b)=0$$ ← normálne rovnice.

$$\hat{x}=(A^TA)^{-1}A^Tb$$ ← riešenie v najm. štvorcoch

$$A\hat{x}=A(A^TA)^{-1}A^Tb$$
$$=P_{\mathcal{R}(A)}b$$ ← projekcia b do $\mathcal{R}(A)$.

str. 439 Riešenie v najmenších štvorcoch systému $Ax=b$:

pre riešenie $\hat{x}$ v najmenších štvorcoch sú nasledovné ekvivalentné:

- ① $\|A\hat{x}-b\| = \min_{x\in\mathbb{R}^n}\|Ax-b\|$
- ③ $A\hat{x} = P_{\mathcal{R}(A)}b$
- ② $A^TAx = A^Tb$ (resp. $A^*Ax=A^*b$ pre $A\in M_{m\times n}(\mathbb{C})$)
- $\hat{x}\in A^\dagger b + \mathcal{N}(A)$ (pseudoinverz, nulpriestor)

nasleduje 4.5.1(1) 6.1

4.6 ~~55~~ ?

Dôkaz spravili sme (1) $\Leftrightarrow$ (2)

a (2) $\rightarrow$ (3)

ešte potrebujeme (3) $\rightarrow$ (2)

Na to potrebujeme fakt o projekciách: $P_{R(A)} = P^T_{R(A)}$

a $P^2_{R(A)} = P_{R(A)}$.

$P_{R(A)} A = A$

Di ~~A~~ $\quad A\hat{x} = P_{R(A)} b$, tak aj

$$\Downarrow$$

$$P_{R(A)} A \hat{x} = P^2_{R(A)} b = P_{R(A)} b$$

$$\Updownarrow$$

$$P_{R(A)} (A\hat{x} - b) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$A\hat{x} - b \in N(P_{R(A)}) = R(A^T) = N(A^T)$$

$$\Updownarrow$$

$$A^T(A\hat{x} - b) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$A^T A \hat{x} = A^T b.$$