# Gram-Schmidt & QR rozklad

Základná procedúra Gram-Schmidtovej ortogonalizácie bola popísaná v 1. ročníku:

ak máme bázu $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $\mathrm{span}(x_1,\dots,x_n) = \mathcal{S}$, chceme nájsť ortonormálnu bázu $\mathcal{O}\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ priestoru $\mathcal{S}$. (spravme pre $\mathbb{C}$)

postup: vytvoriť ortonormálnu bázu $\mathcal{O}_k = \{u_1, \dots, u_k\}$, podpriestoru $\mathcal{S}_k = \mathrm{span}(x_1, \dots, x_k)$,

$\boxed{k=1}$ $$u_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$$

indukcia: $$x_{k+1} \in \mathcal{S}_{k+1} = \mathrm{span}(u_1, \dots, u_k, u_{k+1})$$

($u_{k+1}$ je zatiaľ neznámy)

potom $$x_{k+1} = \underbrace{\langle u_1 | x_{k+1}\rangle u_1 + \langle u_2 | x_{k+1}\rangle u_2 + \dots + \langle u_k | x_{k+1}\rangle u_k}_{\in\, \mathcal{S}_k} + \langle u_{k+1} | x_{k+1}\rangle u_{k+1}$$

$\mathcal{S}_k$ – toto je kolmá projekcia $x_{k+1}$ do $\mathcal{S}_k$.

z toho: $$u_{k+1} = \frac{x_{k-1} - \sum_{i=1}^{k} \langle u_i, x_{k+1}\rangle u_i}{\langle u_{k+1}, x_{k+1}\rangle}$$

lenže $\|u_{k+1}\| = 1$, preto $$1 = \|u_{k+1}\| = \frac{\|x - \Sigma \dots\|}{|\langle u_{k+1}, x_{k+1}\rangle|}$$

čiže $$\langle u_{k+1}, x_{k+1}\rangle = e^{i\theta} \left\| x_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle u_i, x_{k+1}\rangle u_i \right\|$$

(v reálnom prípade $\pm 1$)

→ keďže hodnota $\theta$ neovplyvní lineárny obal ani ortonormalitu

→ volíme $\theta = 0$ a $\langle u_{k+1}, x_{k+1}\rangle \in \mathbb{R}^+$

→ $$u_{k+1} = \frac{x_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle u_i, x_{k+1}\rangle u_i}{\left\| x_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle u_i, x_{k+1}\rangle u_i \right\|}.$$

Ortonorm.

- Báza $S_{k+1}$ je $u_1, \dots, u_{k+1}$, teda matica $U_{k+1} = \begin{pmatrix} | & & | \\ u_1 & \dots & u_{k+1} \\ | & & | \end{pmatrix}$ je má ortonormálne stĺpce, $R(U_{k+1}) = S_{k+1}$, $U_{k+1}^* U_{k+1} = I_{k+1}$

Kolmá projekcia $P_{S_{k+1}}$ je $= U_{k+1} U_{k+1}^*$

Teda
$$u_{k+1} = \frac{x_{k+1} - P_{S_k} x_{k+1}}{\| x_{k+1} - P_{S_k} x_{k+1} \|} = \frac{(I - U_{k+1} U_{k+1}^*) x_{k+1}}{\| (I - U_{k+1} U_{k+1}^*) x_{k+1} \|}.$$

---

Výsledok Gram-Schmidtovej ortogonalizácie možno zapísať pomocou QR rozkladu matice $A$: (s LN stĺpcami)

$$\begin{pmatrix} | & & | \\ a_1 & \dots & a_n \\ | & & | \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} | & & | \\ q_1 & \dots & q_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

podom $q_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|} = \frac{a_1}{\nu_1}$, $\quad q_k = \frac{a_k - \sum_{1}^{k-1} \langle q_i, a_k \rangle q_i}{\nu_k}$ pre $k = 2, 3, \dots, n$

$\nu_k = \| a_k - \Sigma \dots \|$.

Teda $a_k$ sa dajú spätne vyjadriť ako: $a_k = \sum_{i=1}^{k-1} \langle q_i, a_k \rangle q_i + \nu_k q_k$

→ máme maticový zápis:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} | & | & & | \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} | & | & & | \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}}_{Q} \underbrace{\begin{pmatrix} \nu_1 & \langle q_1, a_2 \rangle & \langle q_1, a_3 \rangle & \dots & \langle q_1, a_n \rangle \\ 0 & \nu_2 & \langle q_2, a_3 \rangle & & \langle q_2, a_n \rangle \\ 0 & & & \ddots & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \nu_n \end{pmatrix}}_{R}$$

---

Pozn. Tak ako LU-rozklad opisoval Gaussovu elimináciu, QR rozklad zodpovedá Gram-Schmidtovi (koeficienty v $R$) sú presne to, čo treba odčítavať, stĺpce $Q$ sú výsl...

- Ak ~~x~~ existujú, LU aj QR sú jednoznačné.

- LU rozklad umožňoval rýchle riešenie $Ax = b$

$$\underbrace{Ux = y, \quad Ly = b}$$ ← dva troj. systémy.

QR je "~~ešte~~ ~~ešte~~" dobrý, lebo ak je $A$ typu $n \times n$, potom $Q$ je štvorcová ortogonálna i $Q^{-1} = Q^T$.

Teda $Ax = b \iff QRx = b \iff Rx = Q^T b$, čo je opäť trojuholníkový systém.

- Ak je $A$ obdĺžnikova, ~~tak~~ LU rozklad nebol až tak použiteľný, resp. mali sme normálne rovnice $A^T A x = A^T b$.

---

Príklad: QR rozklad a najmenšie štvorce!

$$A^T A = (QR)^T (QR) = R^T \underbrace{Q^T Q}_{I} R = R^T R$$

preto ~~n~~normálne rovnice budú

$$R^T R x = R^T Q^T b$$

→ $R^T$ je regulárna (trojuholníková s nenulovou diagonálou)

→ $Rx = Q^T b$.

→ čo je horný troj systém na spätnú subs.

Potom $x = R^{-1} Q^T b = (\underbrace{R^T R}^{-1} R^T Q^T b$
$= (A^T A)^{-1} A^T b$

---

Cholesky (314)

# Vektorové normy

- Pytagorova veta

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} = \sqrt{x^T x} \quad v\ \mathbb{R}^n$$

$$\|x\| \quad \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} = \sqrt{x^* x} \quad v\ \mathbb{C}^n$$

- vlastnosti
  - $\|x\| \geq 0$
  - $\|x\| = 0 \iff x = 0$ } kl. definitnosť
  - $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
- normalizácia vektora $u = \frac{x}{\|x\|} \rightarrow \|u\| = \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = \frac{1}{\|x\|} \|x\| = 1.$

---

(Štand.) Skalárny súčin

$$x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad x^* y = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i y_i$$

---

Cauchy-Schwarz

$$|x^* y| \leq \|x\| \|y\| \quad \text{pre } x, y \in \mathbb{C}^n$$

rovnosť iba ak $y = \alpha x$, kde $\alpha = \frac{x^* y}{x^* x}$

---

(Dôkaz) -> kniha

---

Dôsledok - trojuholníková nerovnosť.

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

---

Zovšeobecnenie p-normy: pre $p \geq 1$.

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$$

---

- platí:
  - $\|x\|_p \geq 0$ a $\|x\|_p = 0 \iff x = 0$
  - $\|\alpha x\|_p = |\alpha| \|x\|_p$
  - $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$

štandardná euklidovská norma zodpovedá $p = 2$.

tak ako trojuholníková nerovnosť bola dôsledkom Cauchy-Schwarz,
tak aj tu dostaneme tzv. Minkowského nerovnosť $\|x+y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p$
ako dôsledok Hölderovej nerovnosti. pre $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

$$|x^*y| \le \|x\|_p \|y\|_q.$$

---

V praxi sa používajú iba 3: $p=1$, $p=2$ a $p=\infty$.

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad \text{súčtová norma (grid)}$$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} \qquad \text{euklidovská}$$

$$\|x\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \lim_{p\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} = \max_i |x_i|$$

maximová norma. (suprémová)

že limita je naozaj to:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\tilde{x}_i|^p\right)^{1/p} = |\tilde{x}_1| \Big( \underbrace{\left|\tfrac{x_1}{x_1}\right|^p + \left|\tfrac{x_2}{x_1}\right|^p + \dots + \left|\tfrac{x_k}{x_1}\right|^p}_{k} + \left|\tfrac{x_{k+1}}{x_1}\right|^p + \dots \Big)^{1/p} \to |x_1|$$

ak $|x_1| = |x_2| = \dots = |x_k|$.

---

Obr Jednotková sféra pre $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$

Všeobecná vekt. norma:

$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ spĺňajúca

- $\|x\| \geq 0$ a $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ pre skaláry $\alpha$
- $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (subaditivita)

Ekvivalencia noriem:

ak $\forall x \in V$: $\alpha \leq \dfrac{\|x\|_a}{\|x\|_b} \leq \beta$

→ tak je rovnaká topológia daná otv. guľami.

---

V konečnorozm. prípade → sú všetky normy ekvivalentné

→ vďaka troj. nerovnosti a škálovaniu → spojitosť.

→ spojitá f-cia na kompakte má min & max.

Teda pre $S_b = \{y \mid \|y\|_b = 1\}$ označme $\mu = \min_{y \in S_b} \|y\|_a > 0$

$M = \max_{y \in S_b} \|y\|_a$

potom $\mu \|x\|_b \leq \|x\|_a \leq M \|x\|_b$.

## Maticové normy

Matica v $M_{m \times n}(\mathbb{C})$ je vlastne $mn$ zložkový vektor,
takže môžeme normu A zobrať ako súčet štvorcov
abs. hodnôt zložiek: ale to je súčet noriem po stĺpcoch / riadkoch

$$\|A\|_F^2 = \sum_{i,j} |a_{ij}|^2 = \sum_i \|A_{i,*}\|^2 = \sum_j \|A_{*,j}\|^2 = \operatorname{trace}(A^*A)$$

z teoretického pohľadu.

→ Frobeniova norma. Je vhodná v ~~niektorých~~ ~~aplikáciách~~, ale ale v niektorých aplikáciách nie..