Všeobecná vekt. norma:

$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ spĺňajúca

- $\|x\| \geq 0$ a $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ pre skaláry α
- $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (subaditivita)

Ekvivalencia noriem:

ak $\forall x \in V$: $\alpha \leq \dfrac{\|x\|_a}{\|x\|_b} \leq \beta$

→ tak je rovnaká topológia daná otv. guľami.

V konečnorozm. prípade → sú všetky normy ekvivalentné

→ vďaka troj. nerovnosti a škálovaniu → spojitosť

→ spojitá f-cia na kompakte má min & max.

Teda pre $S_b = \{y \mid \|y\|_b = 1\}$ označme $\mu = \min_{y \in S_b} \|y\|_a > 0$

$M = \max_{y \in S_b} \|y\|_a$

potom $\mu \|x\|_b \leq \|x\|_a \leq M \|x\|_b$.

Maticové normy

Matica v $M_{m \times n}(\mathbb{C})$ je vlastne mn zložkový vektor,

takže môžeme normu A zobrať ako súčet štvorcov

abs. hodnôt zložiek: ale to je súčet noriem po stĺpcoch/riadkoch

$$\|A\|_F^2 = \sum_{i,j} |a_{ij}|^2 = \sum_i \|A_{i*}\|^2 = \sum_j \|A_{*j}\|^2 = \operatorname{trace}(A^* A)$$

→ Frobeniova norma, je vhodná v niektorých z teoretického pohľadu

aplikáciách, ale v niektorých aplikáciách nie...

• pre vektorové normy sme mali násobenie skalárom, súčet,

ale pre matice máme aj násobenie $\# A+B$.

Aký je vzťah k normám?

---

po zložkách (riadkoch)

$$\|Ax\|_2^2 = \sum_i |A_{i*}x|^2 \overset{C\text{-}S}{\leq} \sum_i \left(\|A_{i*}\|_2^2 \|x\|_2^2\right) = \left(\sum \|A_{i*}\|_2^2\right)\|x\|_2^2 = \|A\|_F^2 \|x\|_2^2$$

$$\text{t.j.} \quad \|Ax\|_2 \leq \|A\|_F \|x\|$$

Podobne aj pre všeobecnejšie maticové násobenie máme:

po stĺpcoch

$$\|AB\|_F^2 = \sum_j \|[AB]_{*j}\|_2^2 = \sum_j \|A(B_{*j})\|_2^2 \leq \sum_j \|A\|_F^2 \|B_{*j}\|_2^2$$

$$= \|A\|_F^2 \sum_j \|B_{*j}\|_2^2 = \|A\|_F^2 \|B\|_F^2$$

$$\Rightarrow \quad \|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F .$$

Teda od maticovej normy budeme očakávať aj

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\| \quad \text{– } \underline{\text{submultiplikativita}}$$

Všeob. maticová norma

- $\|A\| \geq 0$ a $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$
- $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$
- $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$
- $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

T3

Videli sme, že Frobeniova norma toto spĺňa.
ale dôležité sa, že dobré normy sú aj tzv. indukované normy:

Vektorová norma definovaná na $\mathbb{C}^p$ pre $p = m, n$ indukuje maticovú normu:

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\| \quad \text{pre } A \in M_{m\times n}(\mathbb{C}),\ x \in \mathbb{C}^n$$

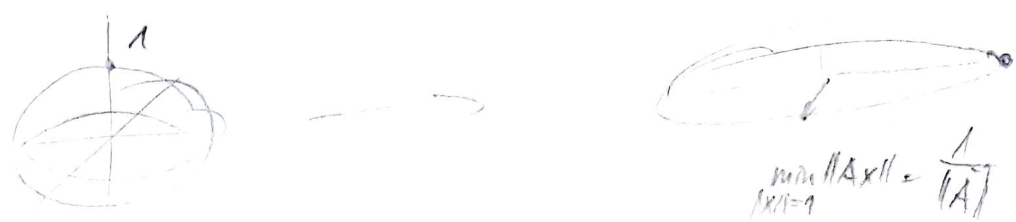
(vďaka konečnorozmernosti max. existuje)

→ potom zjavne $\|Ax\| \leq \|A\|\,\|x\|$ (z def.)

a pre regulárne A: $\min_{\|x\|=1} \|Ax\| = \frac{1}{\|A^{-1}\|}$.

To, že to je norma: $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$ → potrebujeme sa pozrieť na maximá zloženého zobrazenia. (cvičenia)

Obr



$\max\|Ax\| = \|A\|$

$\min_{\|x\|=1}\|Ax\| = \frac{1}{\|A^{-1}\|}$

Môžeme sa pýtať, akú normu indukuje Euklidovská norma, nebude to Frobeniova:
→ odpoveď je možno prekvapivá,

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}},$$

kde λ_{max} je najväčšia vl. hodnota A^*A.

pre regulárne:

$$\|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\min_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{min}}},$$ kde λ_{min} je najm. vl. hodnota A^*A

Dôkaz (náznak) pozrime sa na $f(x) = \|Ax\|_2^2 = x^T A^T A x$ ($\mathbb{R}$-prípad)
$x^* A^* A x$

$\to$ hľadať min/max pomocou Lagrangeových multiplikátorov.

$\to$ vedie k rovnici. $(A^T A - \lambda I)x = 0$

potom v takom bode:

$$x^T A^T A x = \lambda x^T x = \lambda \qquad (\text{pre } \|x\| = 1)$$

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = \max_{\|x\|^2=1} \|Ax\| = \left(\max_{x^T x = 1} x^T A^T A x\right)^{1/2} = \sqrt{\lambda_{max}}$$

Ďalšie vlastnosti indukovanej 2-normy (8.3)

- $\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \max_{\|y\|=1} |y^* A x|$
- $\|A\|_2 = \|A^*\|_2$
- $\|A^* A\|_2 = \|A\|_2$
- $\left\|\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\right\|_2 = \max\{\|A\|_2, \|B\|_2\}$.
- $\|U^* A V\|_2 = \|A\|_2$ ak $UU^* = I$ a $V^* V = I$ (unit. matice)

Dôkaz - cvičenie

1 a ∞-normy zasa máme:

$\|A\|_1 = \max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}| =$ najväčšia suma abs. hodn. po stĺpcoch

$\|A\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}| =$ najväčšia suma abs. hodnôt po riadkoch.

Maticová 1-norma a maticová ∞-norma

$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$, $\|x\|_\infty = \max_{i=1..n} |x_i|$

Maticové normy indukované vektorovými normami $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_\infty$ spĺňajú:

$\|A\|_1 = \max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|$ = najväčší súčet abs. hodnôt po stĺpcoch

$\|A\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$ = najväčší súčet abs. hodnôt po riadkoch

Dôkaz: • Trojuholníková nerovnosť

$$\|Ax\|_1 = \sum_i |A_{i*}x| = \sum_i \left|\sum_j a_{ij}x_j\right| \le \sum_i \sum_j |a_{ij}||x_j| = \sum_j \left(|x_j| \sum_i |a_{ij}|\right)$$

$$\le \left(\sum_j |x_j|\right)\left(\max_j \sum_i |a_{ij}|\right) = \max_j \sum_i |a_{ij}|$$

Rovnosť sa nadobúda, lebo ak A_{*k} je stĺpec s najväčším súčtom abs. hodnôt, tak pre $x = e_k$ máme $\|e_k\|_1 = 1$, $\|Ae_k\|_1 = \|A_{*k}\|_1 = \max$.

• Pre $\|x\|_\infty = 1$ (t.j. $|x_i| \le 1$)

$$\|Ax\|_\infty = \max_i \left|\sum_j a_{ij}x_j\right| \le \max_i \sum_j |a_{ij}||x_j| \le \max_i \sum_j |a_{ij}|$$

Rovnosť sa nadobúda – lebo ak A_{k*} je riadok s najväčším súčtom abs. hodnôt, zvolíme x znamienkový vektor:

$$x_j = \begin{cases} 1 & a_{kj} \ge 0 \\ -1 & a_{kj} < 0 \end{cases}$$

potom $|A_{i*}x| = \left|\sum_j a_{ij}x_j\right| \le \sum_j |a_{ij}|$

$|A_{k*}x| = \sum_j |a_{kj}| = \max_i \sum_j |a_{ij}|$

$\Rightarrow$ $\|x\|_\infty = 1$ a $\|Ax\|_\infty = \max_i |A_{i*}x| = \max_i \sum_j |a_{ij}|$

$\square$

(toľko k normám)

kapitolu 5.3 – priestory so skal. súčinom preskakujeme

→ pozrieť si prípadne dôkaz nasledujúceho:

Ak $\|\cdot\|$ je norma na VP V_y, potom na V existuje skal. súčin spĺňajúci $\langle \cdot | \cdot \rangle = \|\cdot\|^2$ práve vtedy, keď je splnená rovnobežníková vlastnosť:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad \text{pre } \forall\, x, y \in V.$$

5.6 Unitárne a ortogonálne matice

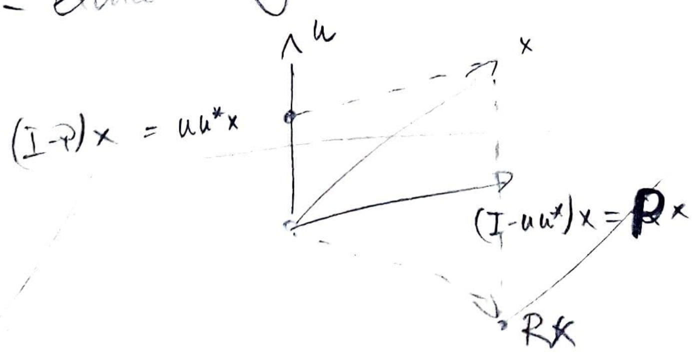
Komplexná matica $U_{n\times n}$ je <u>unitárna</u> ak jej stĺpce (alebo riadky) tvoria ortonormálnu bázu $\mathbb{C}^n$ $\qquad U^*U = I, \quad U^* = U^{-1}$

Reálna matica Q je <u>ortogonálna</u> ak jej stĺpce (riadky) tvoria ortonormálnu bázu $\mathbb{R}^n$! $\qquad Q^TQ = I, \quad Q^T = Q^{-1}$

– tiež zachovávajú dĺžky vektora.

Videli sme, že projekcia na $\mathrm{span}[u]$ sa dá popísať maticou uu^* (ak $\|u\|=1$), projekcia na $\mathrm{span}(u)^\perp$ bude $I - u^*u$.

– elementárny ~~ort~~ kolmý projektor.



→ pre $u \neq 0$ je <u>elementárny reflektor</u> cez $u^\perp$ definovaný ako

$$R = I - 2\frac{uu^*}{u^*u}$$

(resp. ak $\|u\|=1$)

$$R = I - 2uu^*.$$

– Householderova transformácia.

Vlastnosti elementárnych reflexií

- R sú unitárne, hermitovské a involutórne

$$R = R^* = R^{-1}$$

- Ak prvá zložka x_1 vektora x je komplexná, potom

pre $u = x \pm \mu \|x\| e_1$ $\qquad \mu = \begin{cases} 1 & x_1 \text{ pre nulu} \\ \frac{x_1}{|x_1|} & x_1 \text{ inak } \notin \mathbb{R} \end{cases}$

máme $Rx = \mp \mu \|x\| e_1$

t. j. R "zrkadlí" x na prvú súradnicovú os x_1.

dôkaz: $Rx = x - 2uu^*x / u^*u = x - \underbrace{\frac{2u^*x}{u^*u}}_{1} u = x - u = \mp \mu \|x\| e_1$

$2u^*x \overset{?}{=} u^*u$ $\qquad$ lebo: $LS = 2(x \pm \mu \|x\| e_1)^*(x) = 2x^*x \pm 2\bar{\mu} \|x\| x_1$

$PS = (x \pm \mu \|x\| e_1)^*(x \pm \mu \|x\| e_1) = x^*x \pm \bar{\mu} \|x\| x_1 \pm \mu \|x\| \bar{x}_1 + \bar{\mu}\mu \|x\|^2$ ✓

toto sa dá využiť v tzv. Householderovej redukcii (kolmej)

$A_{m \times n} = \left[A_{*1} \middle| A_{*2} \middle| \dots \middle| A_{*n} \right]$

zvolíme $R_1 = I - 2\frac{uu^*}{u^*u}$ pre $u = A_{*1} \pm \mu \|A_{*1}\| e_1$

$R_1 A_{*1} = \mp \mu \|A_{*1}\| e_1 = \begin{pmatrix} t_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

teda $R_1 A = \left[R_1 A_{*1} \middle| R_1 A_{*2} \middle| \dots \middle| R_1 A_{*n} \right] = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ 0 & * & & * \\ \vdots & & & \\ 0 & * & & * \end{bmatrix}.$

kde A_2 je $(m-1)\times(n-1)$ matica.

Teraz môžme použiť tú istú procedúru pre A_2 – pomocou matice $\hat{R}_2$ vynulujeme všetko pod pozíciou (1,1) v matici A_2. Voľbou

$$R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \hat{R}_2 \end{pmatrix}$$

dostávame

$$R_2 R_1 A = \begin{pmatrix} t_{11} & t_1^T \\ 0 & \hat{R}_2 A_2 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c} t_{11} & t_{12} & t_{13} \; t_{1n} \\ 0 & t_{22} & t_{23} \cdots t_{2n} \\ \hline 0 & 0 & * \quad * \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & * \quad * \end{array}\right)$$

po $(k-1)$ operáciach

$$R_{k-1} \cdots R_2 R_1 A = \left(\begin{array}{c|c} T_{k-1} & \tilde{T}_{k-1} \\ \hline 0 & A_k \end{array}\right)$$

→ Nakoniec dostaneme horný lichobežníkový tvar:

$$R_n \cdots R_2 R_1 A = \left(\begin{array}{c} * \; \cdots \; * \\ \ddots \;\; \vdots \\ \quad\quad * \\ \hline \\ \end{array}\right) \Big\} n\times n$$ ak $m > n$

resp.

$$R_{m-1} \cdots R_2 R_1 A = \Big(\underbrace{\begin{array}{ccc} * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ & & * \end{array}}_{m\times m} \Big| \begin{array}{ccc} * & \cdots & * \\ * & \cdots & * \end{array}\Big)$$ ak $m < n$.

Ak $m = n$ máme horný trojuholníkový tvar.

Ortogonálna redukcia: Pre každú $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ existuje unitárna matica P taká, že

$$PA = T$$

je v hornom lichobežníkovom tvare. Ak P je ako sme videli, ide o tzv. Householderovu redukciu.