Maticová 1-norma a maticová ∞-norma

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \quad , \quad \|x\|_\infty = \max_{i=1..n} |x_i|$$

Maticové normy indukované vektorovými normami $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_\infty$ spĺňajú:

$$\|A\|_1 = \max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}| = \text{najväčší súčet abs. hodnôt po stĺpci}$$

$$\|A\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}| = \text{najväčší súčet abs. hodnôt po riadku.}$$

Dôkaz • Trojuholníková nerovnosť:

$$\|Ax\|_1 = \sum_i |A_{i*}x| = \sum_i \Big|\sum_j a_{ij}x_j\Big| \le \sum_i \sum_j |a_{ij}||x_j| = \sum_j \Big(|x_j| \sum_i |a_{ij}|\Big)$$

$$\le \Big(\sum_j |x_j|\Big)\Big(\max_j \sum_i |a_{ij}|\Big) = \max_j \sum_i |a_{ij}|$$

Rovnosť sa nadobúda, lebo ak A_{*k} je stĺpec s najväčším súčtom abs. hodnôt, tak pre $x = e_k$ máme $\|e_k\|_1 = 1$, $\|Ae_k\|_1 = \|A_{*k}\|_1 = \max$.

• Pre $\|x\|_\infty = 1$ (t.j. $|x_i| \le 1$)

$$\|Ax\|_\infty = \max_i \Big|\sum_j a_{ij}x_j\Big| \le \max_i \sum_j |a_{ij}||x_j| \le \max_i \sum_j |a_{ij}|$$

Rovnosť sa nadobúda – lebo ak A_{k*} je riadok s najväčším súčtom abs. hodnôt, zvolíme x znamienkový vektor:

$$x_j = \begin{cases} 1 & a_{kj} \ge 0 \\ -1 & a_{kj} < 0 \end{cases} \quad \text{potom} \quad \begin{aligned} |A_{i*}x| &= \Big|\sum_j a_{ij}x_j\Big| \le \sum_j |a_{ij}| \\ |A_{k*}x| &= \sum_j |a_{kj}| = \max_i \sum_j |a_{ij}| \end{aligned}$$

– $\|x\|_\infty = 1$ a $\|Ax\|_\infty = \max_i |A_{i*}x| = \max_i \sum_j |a_{ij}|$

$\boxtimes$

(Toľko k normám)...

kapitola 5.3 — priestory so skal. súčinom
preskakujeme

→ pozrieť si prípadne dôkaz nasledujúceho:

Ak $\|\cdot\|$ je norma na VP V, potom na V existuje skal. súčin spĺňajúci $\langle \cdot | \cdot \rangle = \|\cdot\|^2$ práve vtedy, keď je splnená rovnobežníková rovnosť:
$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$ pre $\forall\, x, y \in V$.

5.6 Unitárne a ortogonálne matice

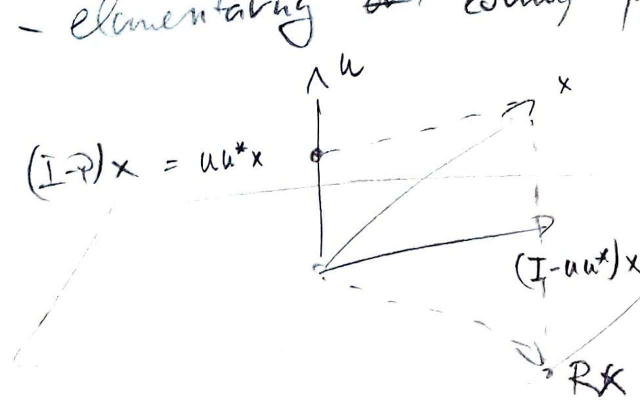
Komplexná matica $U_{n\times n}$ je unitárna ak jej stĺpce (alebo riadky) tvoria ortonormálnu bázu $\mathbb{C}^n$ $\quad U^*U = I,\ U^* = U^{-1}$

Reálna matica Q je ortogonálna ak jej stĺpce (riadky) tvoria ortonormálnu bázu $\mathbb{R}^n$. $\quad Q^TQ = I,\ Q^T = Q^{-1}$

— tiež zachovávajú dĺžky vektorov.

Videli sme, že projekcia na $\mathrm{span}(u)$ sa dá zapísať maticou uu^* (ak $\|u\|=1$), projekcia na $\mathrm{span}(u)^\perp$ bude $I - u^*u$

— elementárny ~~ort~~ kolmý projektor.



→ pre $u \neq 0$ je elementárny reflektor cez $u^\perp$ definovaný ako
$$R = I - 2\frac{uu^*}{u^*u}$$
(resp. ak $\|u\|=1$)
$$R = I - 2uu^*.$$

— Householderova transformácia.

Vlastnosti elementárnych reflexií

- R sú unitárne, hermitovské a involutórne

$$R = R^* = R^{-1}$$

- ~~Ak~~ prvá zložka x_1 vektora x je nenulová, potom

pre $u = x \pm \mu \|x\| e_1$ $\qquad \mu = \begin{cases} 1 & x_1 \text{ je reálna} \\ \frac{x_1}{|x_1|} & x_1 \text{ nie je z } \mathbb{R} \end{cases}$

máme $Rx = \mp \mu \|x\| e_1$

– t. j. R "zrkadlí" x na prvú súradnicovú os x_1.

dôkaz: $\quad Rx = x - 2u u^* x / u^* u = x - \underbrace{\frac{2u^* x}{u^* u}}_{1} u = x - u = \mp \mu \|x\| e_1$

$2u^* x \overset{?}{=} u^* u$ $\quad$ | lebo: $LS = 2(x \pm \mu \|x\| e_1)^*(x) = 2x^* x \pm 2\mu \|x\| x_1$

$PS = (x \pm \mu \|x\| e_1)^*(x \pm \mu \|x\| e_1) = x^* x \pm \mu \|x\| x_1 \pm \bar{\mu} \|x\| \bar{x}_1 + \|x\|^2$ ✓

toto sa dá využiť v tzv. Householderovej redukcii (kolmej)

$$A_{m \times n} = \left[A_{*1} \middle| A_{*2} \middle| \dots \middle| A_{*n} \right]$$

zvolíme $R_1 = I - 2\frac{uu^*}{u^* u}$ pre $u = A_{*1} \pm \mu \|A_{*1}\| e_1$

$$R_1 A_{*1} = \mp \mu \|A_{*1}\| e_1 = \begin{pmatrix} t_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

potom $R_1 A = \left[R_1 A_{*1} \middle| R_1 A_{*2} \middle| \dots \middle| R_1 A_{*n} \right] = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ 0 & * & & * \\ \vdots & & & \\ 0 & * & & * \end{bmatrix}$.

kde A_2 je $(m-1)\times(n-1)$ matica.

Teraz môžme použiť tú istú procedúru pre A_2 – pomocou matice $\hat{R}_2$ vynulujeme všetko pod pozíciou $(1,1)$ v matici A_2. Voľbou

$$R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \hat{R}_2 \end{pmatrix}$$

dostávame

$$R_2 R_1 A = \begin{pmatrix} t_{11} & t_1^T \\ 0 & \hat{R}_2 A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & t_{23} \cdots & t_{2n} \\ 0 & 0 & * & * \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

po $(k-1)$ opakovaniach

$$R_{k-1} \cdots R_2 R_1 A = \left(\begin{array}{c|c} T_{k-1} & \tilde{T}_{k-1} \\ \hline 0 & A_k \end{array}\right)$$

→ Nakoniec dostaneme horný lichobežníkový tvar:

$$R_n \cdots R_2 R_1 A = \begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ & & * \\ \hline & & \\ & & \end{pmatrix} \Big\} n\times n \quad \text{ak } m > n$$

resp.

$$R_{m-1} \cdots R_2 R_1 A = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ & & * \end{array}}_{m\times m} \begin{array}{|ccc} * & & * \\ * & & * \end{array}\right) \quad \text{ak } m < n.$$

Ak $m = n$ máme horný trojuholníkový tvar.

Ortogonálna redukcia: Pre každú $X \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ existuje unitárna matica P taká, že $PA = T$ je v hornom lichobežníkovom tvare. Ak P je ako sme videli, ide o tzv. Householderovu redukciu.

8.3

ak je A štvorcová, T je horná trojuholníková,
a ak je A reálna, potom sa P dá vybrať ortogonálne.

Pre QR rozklad sme mali

$$\underset{m\times n}{A} = \underset{m\times n}{Q}\, R_{n\times n}$$

Householderov

$$\underset{m\times n}{A} = \underset{m\times m}{P^*}\, \underset{m\times n}{T}$$

pre štvorcové matice dostaneme $Q = P^*$, $R = T$
pokiaľ zabezpečíme kladnosť diagonály v T.

---

405 – orth. decomp. theorem

406 – $R = U^T A V$ – URV faktorizácia

407

R sa dá spraviť horná troj, resp. diagonálna

411 – SVD

412

422 – pseudoinverse

423

424

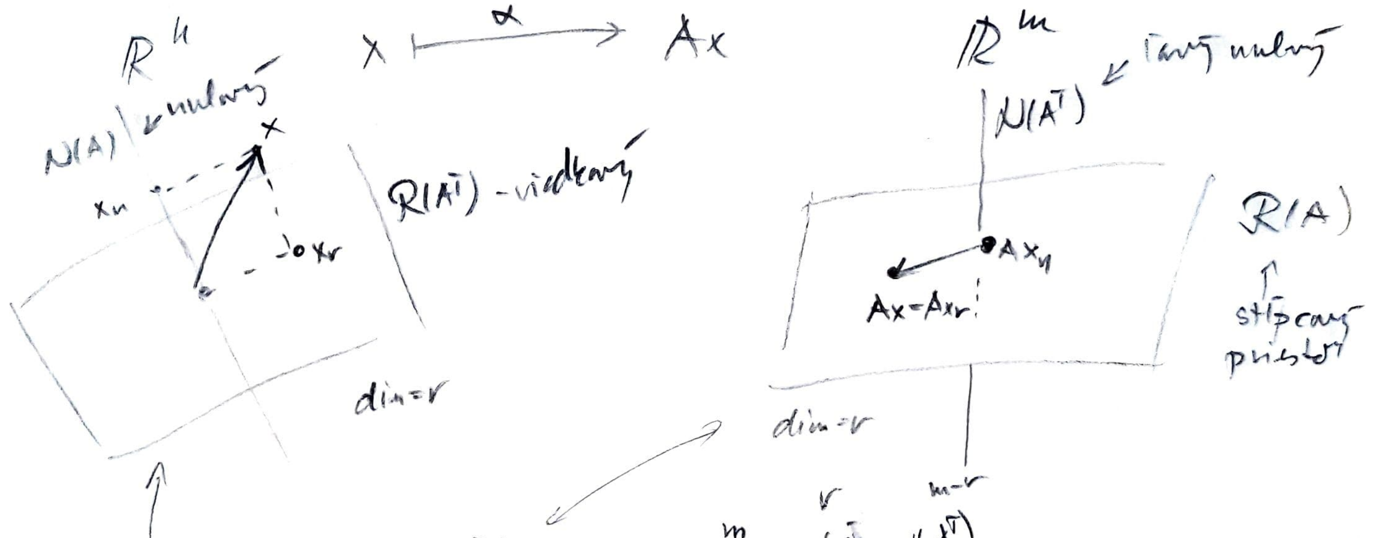
Singulárny rozklad a pseudoinverzie

- Dnes sa pozrieme na obdĺžnikové matice $A_{m\times n}$ s $h(A)=r$.
- vieme, že ľavá/pravá inverzná k A existuje práve vtedy keď $h(A)=\min(m,n)$.
  - → potom má vzorec: ĽAVÁ: $(A^TA)^{-1}A^T$
    PRAVÁ: $A^T(AA^T)^{-1}$

Čo ale vieme povedať, ak $r=h(A)<\min(m,n)$?

Ukazuje sa, že budeme mať viacero rozkladov zodpovedajúcich hodnosti A
→ postupne ich budeme vylepšovať.

A ako matica zobrazenia:



vieme: $R(A)^\perp = N(A^T)$, $\quad \mathbb{R}^m = \underset{r}{R(A)} + \underset{m-r}{N(A^T)}$

$R(A^T)^\perp = N(A)$ $\quad \mathbb{R}^n = \underset{r}{R(A^T)} + \underset{n-r}{N(A)}$

BT rozklad (Báza, Triangular)

Nech $a_{p_1}, a_{p_2}, \dots, a_{p_r}$ sú "pivotové" stĺpce matice $A_{m\times n}$.
Potom tvoria bázu $R(A) = \mathrm{span}(a_1, \dots, a_n)$, navyše $\mathrm{span}(a_{p_1}, \dots, a_{p_r}) = \mathrm{span}(a_1, a_2, \dots, a_n)$

Platí rozklad:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} | & | & & | \\ a_{p_1} & a_{p_2} & \dots & a_{p_r} \\ | & | & & | \end{pmatrix}_{m\times r}}_{B} \underbrace{\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}_{r\times n}}_{T} = \begin{pmatrix} | & & | \\ a_1 & \dots & a_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

koeficienty, ktorými vygenerujeme vektory $a_1, \dots, a_n$ z bázy $a_{p_1}, \dots, a_{p_r}$

Môžme to však vylepšiť.

URV - rozklad

Nech $B_{\mathcal{R}(A)} = \{u_1, \dots, u_r\}$ je ortonormálna báza $\mathcal{R}(A)$

$B_{N(A^T)} = \{u_{r+1}, \dots, u_m\}$ je ortonormálne báza $N(A^T)$.

a $U = \begin{bmatrix} | & & | & | & & | \\ u_1 & \dots & u_r & u_{r+1} & \dots & u_m \\ | & & | & | & & | \end{bmatrix}$. dohromady dávajú ortonorm. bázu $\mathbb{R}^m$, unitárnu maticu U.

Podobne $B_{\mathcal{R}(A^T)} = \{v_1, \dots, v_r\}$ a $B_{N(A)} = \{v_{r+1}, \dots, v_n\}$

dá unitárnu maticu $V = \begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & & | \end{bmatrix}$.

Ak sa pozrieme na súčin $R = U^T A V$, máme

$r_{ij} = u_i^T A v_j$. Lenže $u_i^T A = 0$ pre $i = r+1, \dots m$ (ľavý nul. priestor)

A $Av_j = 0$ pre $j = r+1, \dots, n$ (nul. priestor)

Teda
$$R = U^T A V = \left(\begin{array}{ccc|ccc} u_1^T A v_1 & \dots & u_1^T A v_r & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ u_r^T A v_1 & \dots & u_r^T A v_r & 0 & & 0 \\ \hline 0 & & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & & 0 & 0 & & 0 \end{array}\right)$$

preto sa A dá rozložiť ako:

$$A = URV^T = U \left(\begin{array}{c|c} C_{r\times r} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) V^T.$$

→ pričom C je regulárna, lebo

$$h(C) = h\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\uparrow}{=} h(U^T A V) \underset{\uparrow}{=} h(A) = r$$

násobenie unit. nemení hodnosť