Singulárny rozklad a pseudoinverzie

- Dnes sa pozrieme na obdĺžnikové matice $A_{m\times n}$ s $h(A)=r$.

② - vieme, že ľavá/pravá inverzná k A existuje práve vtedy keď $h(A)=\min(m,n)$.

→ potom má vzorec: ĽAVÁ: $(A^TA)^{-1}A^T$

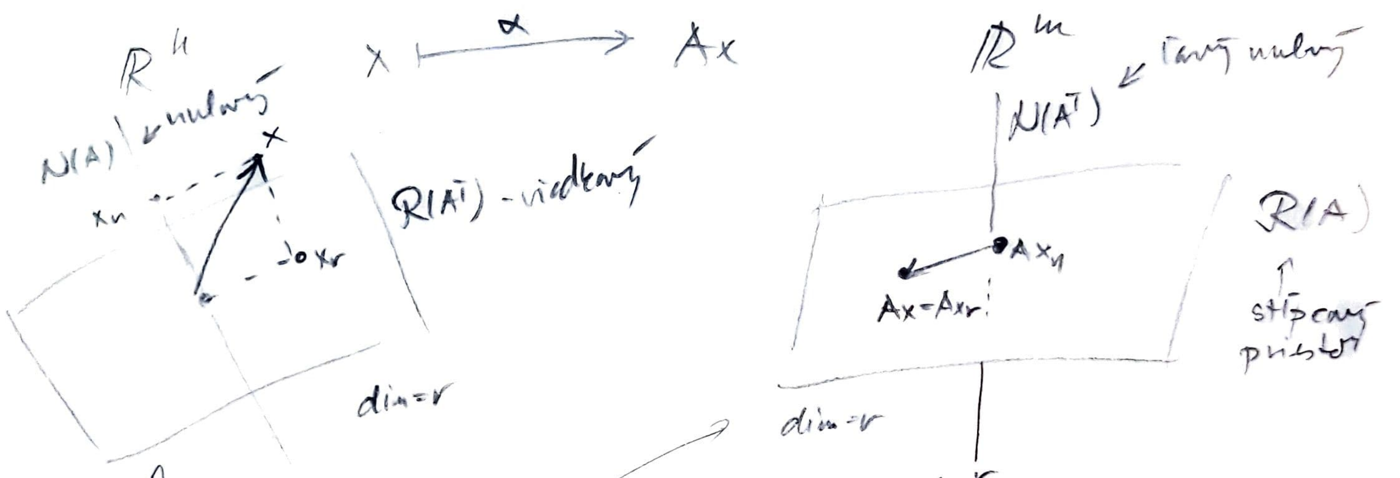
PRAVÁ: $A^T(AA^T)^{-1}$

Čo ale vieme povedať, ak $r=h(A)<\min(m,n)$?

Ukazuje sa, že budeme mať viacero rozkladov zodpovedajúcich hodnosti A

→ postupne ich budeme vylepšovať.

A ako matica zobrazenia:



Vieme: $R(A)^\perp = N(A^T)$, $\quad \mathbb{R}^m = \overset{r}{R(A)} + \overset{m-r}{N(A^T)}$

$R(A^T)^\perp = N(A)$, $\quad \mathbb{R}^n = \underset{r}{R(A^T)} + \underset{n-r}{N(A)}$

BT rozklad (Báza, Triangular)

Nech $a_{p_1}, a_{p_2}, \dots, a_{p_r}$ sú "pivotové" stĺpce matice $A_{m\times n}$.

Potom tvoria bázu $R(A)=\mathrm{span}(a_1,\dots,a_n)$, navyše $\mathrm{span}(a_{p_1},\dots,a_{p_r}) = \mathrm{span}(a_1,a_2,\dots,a_n)$

Píšeme rozklad:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} | & | & & | \\ a_{p_1} & a_{p_2} & \dots & a_{p_r} \\ | & | & & | \end{pmatrix}}_{B}{}_{m\times r} \underbrace{\begin{pmatrix} & & \\ & & \end{pmatrix}}_{T}{}_{r\times n} = \begin{pmatrix} | & & | \\ a_1 & \dots & a_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

koeficienty, ktorými vygenerujeme vektory $a_1,\dots,a_n$ z bázy $a_{p_1},\dots,a_{p_r}$

Môžme to však vylepšiť.

URV - rozklad

Nech $B_{\mathcal{R}(A)} = \{u_1, \dots, u_r\}$ je ortonormálna báza $\mathcal{R}(A)$

$B_{N(A^T)} = \{u_{r+1}, \dots, u_m\}$ je ortonormálna báza $N(A^T)$.

a $U = \begin{bmatrix} | & & | & | & & | \\ u_1 & \dots & u_r & u_{r+1} & \dots & u_m \\ | & & | & | & & | \end{bmatrix}$. dohromady dávajú ortonorm. bázu $\mathbb{R}^m$, unitárnu maticu U.

Podobne $B_{\mathcal{R}(A^T)} = \{v_1, \dots, v_r\}$ a $B_{N(A)} = \{v_{r+1}, \dots, v_n\}$

dá unitárnu maticu $V = \begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & & | \end{bmatrix}$.

Ak sa pozrieme na súčin $R = U^T A V$, máme

$r_{ij} = u_i^T A v_j$. Lenže $u_i^T A = 0$ pre $i = r+1, \dots m$
(ľavý nul. priestor)

A $Av_j = 0$ pre $j = r+1, \dots, n$ (nul. priestor)

Teda

$$R = U^T A V = \left(\begin{array}{ccc|ccc} u_1^T A v_1 & \dots & u_1^T A v_r & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ u_r^T A v_1 & \dots & u_r^T A v_r & 0 & & 0 \\ \hline 0 & & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & & 0 & 0 & & 0 \end{array}\right)$$

preto sa A dá rozložiť ako:

$$A = URV^T = U \left(\begin{array}{c|c} C_{r \times r} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) V^T.$$

→ pričom C je regulárna, lebo

$$h(C) = h\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = h(U^T A V) \underset{\uparrow}{=} h(A) = r$$

násobenie unit.
nemení hodnosť

Singulárny rozklad

Ak by sme sa trochu s konštrukciou báz $u_1, \dots, u_r \in R(A)$
$v_1, \dots, v_r \in R(A^T)$

posnažili, dala by sa matica C z URV rozkladu vytvoriť ~~horná~~ dolná trojuholníková. (použiť Householderovou redukciu) na

$$\underset{m\times m}{P}\ \underset{m\times n}{A} = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \}\, r\times n \\ \}\, m-r\times n \end{matrix}$$ ← horný lichobežníkový tvar, $h(B)=r$

potom môžme použiť Householderovu redukciu na B^T - t.j. nájsť Q typu $n\times n$:

$$QB^T = \begin{pmatrix} T_{r\times r} \\ 0 \end{pmatrix}$$ ← horná trojuholníková, $h(T)=r$.

$$\Downarrow$$

$$B = (T^T \mid 0)\, Q$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} T^T & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) Q$$

preto

$$A = \underset{U}{P^T} \underset{R}{\begin{pmatrix} T^T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \underset{V}{Q}$$

Singulárny rozklad - Singular Value decomposition SVD

Ukážeme, že matice $\underset{m\times m}{U}$ a $\underset{n\times n}{V}$ sa dajú nájsť tak, že matica R bude diagonálna, obsahujúca reálnu kladnú diagonálu.

Nech $\sigma_1 = \|A\|_2 \underset{\text{cvič.}}{=} \|A^T\|_2$

t.j. $\exists\, x \in \mathbb{R}^n$: $\|Ax\| = \sigma_1 \|x\|$ a ~~$\exists y \in \mathbb{R}^m$: $\|A^T y\| = \sigma_1 \|y\|$~~

predminule sme spomenuli, že také x je vl. vektorom $A^T A$ pre $\lambda = \sigma_1^2$ (bez dôkazu) (~~y je vl. vektorom AA^T~~)

$$y = \frac{Ax}{\|Ax\|_2} = \frac{Ax}{\sigma_1}$$

$$y^T A x = \frac{x^T A^T A x}{\sigma_1} = \frac{\lambda x^T x}{\sigma_1} = 0$$

$$y^T A x = \sigma_1 y^T y = 0 \quad , \quad y^T A x = y^T (\sigma_1 y) = \sigma_1 \, ?$$

Ešte k singulárnemu rozkladu

$\underset{n\times n}{A} = \underset{n\times n}{U}\,\underset{n\times n}{D}\,\underset{n\times n}{V^T}$ - regulárna matica

$A^{-1} = V D^{-1} U^T$

Chceme vidieť, na čo sa zobrazí 1-tková ~~guľa~~ sféra v $\mathbb{R}^n$ (teda $\|x\|_2 = 1$)

$\mathbb{R}^n$

označme $w = U^T y$ (súradnice y vzhľadom na U)

$$1 = \|x\|_2^2 = \|A^{-1}Ax\|_2^2 = \|A^{-1}y\|_2^2 = \|VD^{-1}U^Ty\|_2^2 \underset{\substack{\uparrow\\ V \text{ zachováva} \\ \text{dĺžku}}}{=} \|D^{-1}U^Ty\|_2^2$$

$$= \|D^{-1}w\|_2^2 = \frac{w_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{w_2^2}{\sigma_2^2} + \dots + \frac{w_n^2}{\sigma_n^2}$$ ← rovnica elipsoidu

s poloosami $u_1, u_2, \dots, u_n$

a dĺžkami $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$

— š| obdĺžnik 414

Pseudoinverz

konzist. $Ax = b$ má riešenie $x = A^+b$, pričom toto minimalizuje normu.

Nech $Ax_0 = b$. Subst. $A = AA^+A$ dá

$$b = Ax_0 = AA^+\underbrace{Ax_0}_{b} = AA^+b.$$ Teda A^+b je naozaj riešením $Ax = b$.

Všeob. riešenie má tvar $A^+b + N(A)$., $z = A^+b + n$

keďže $A^+b \in \mathcal{R}(A^+) = \mathcal{R}(A^T)$ (cvič.) a $n \in N(A) \Rightarrow n \perp A^+b$

potom Pytagorova veta dá:

$$\|z\|_2^2 = \|A^+b + n\|_2^2 = \|A^+b\|_2^2 + \|n\|_2^2 \geq \underset{\substack{\uparrow\\ \text{minimum}}}{\|A^+b\|_2^2}.$$

(podobne pre riešenie v najm. štvorcoch.)

Determinanty preskočíme — žiadna nová teória
— možno niektoré z príkladov do opakovania

---

7 Vl. vektory & vl. hodnoty

Opakovanie: $Ax = \lambda x$ — vl. vektor, vl. hodnota

$\sigma(A)$ — spektrum

- $\lambda \in \sigma(A) \Leftarrow A - \lambda I$ je sing $\Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$
- $\{x \neq 0 \mid x \in N(A - \lambda I)\}$ — množina vl. vektorov (doplniť $x = \vec{0}$) na vl. podpriestor

$$V_\lambda = N(A - \lambda I)$$

- ľavý vl. vektor: $y^*(A - \lambda I) = 0$

---

char. polynóm — stupeň n
— n-koreňov s násobnosťou
— ak je reálny $\chi(\lambda) \to \lambda \in \sigma(A) \Rightarrow \bar{\lambda} \in \sigma(A)$

Koeficienty $\lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + c_2 \lambda^{n-2} + \dots + c_{n-1}\lambda + c_n = 0$

$$\mathrm{trace}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = -c_1$$

$$\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = (-1)^n c_n$$

$c_k = (-1)^k \sum$ (všetky $k \times k$ hlavné minory) ↑ det $k \times k$ podmatíc (riadky $i_1 i_2 \dots i_k$, stĺpce $i_1 i_2 \dots i_k$)

$$= (-1)^k \sum_{0 \le i_1 < i_2 \dots < i_k \le n} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_k}$$

↑ k-ty sym. polynóm $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

vl. hodnoty závisia spojito od prvkov matice A

Ohraničenie: spektrálny polomer

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$$

→ každá maticová norma dá ohraničenie: