Ešte k singulárnemu rozkladu

$A = \underset{n\times n}{U}\,\underset{n\times n}{D}\,\underset{n\times n}{V^T}$ - regulárna matica

$A^{-1} = V D^{-1} U^T$

Chceme vidieť, na čo sa zobrazí 1-tková ~~guľa~~ sféra v $\mathbb{R}^n$ (vrch $\|x\|_2 = 1$)

$\mathbb{R}^n$

označme $w = U^T y$ (súradnice y vzhľadom na U)

$$1 = \|x\|_2^2 = \|A^{-1}Ax\|_2^2 = \|A^{-1}y\|_2^2 = \|VD^{-1}U^Ty\|_2^2 \underset{\substack{\uparrow\\ V \text{ zachováva} \\ \text{dĺžku}}}{=} \|D^{-1}U^Ty\|_2^2$$

$$= \|D^{-1}w\|_2^2 = \frac{w_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{w_2^2}{\sigma_2^2} + \dots + \frac{w_n^2}{\sigma_n^2}$$ ← rovnica elipsoidu

s poloosami $u_1, u_2, \dots, u_n$

a dĺžkami $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$

— ši obdĺžnik 414

k

Pseudoinverz

konzist. $Ax = b$ má riešenie $x = A^+ b$, pričom toto minimalizuje normu.

Nech $Ax_0 = b$. Subst. $A = AA^+A$ dá

$b = Ax_0 = A\underbrace{A^+Ax_0}_{b} = AA^+b$. Teda A^+b je naozaj riešením $Ax=b$.

Všetky riešenia má tvar $A^+b + N(A)$. , $z = A^+b + n$

Lenže $A^+b \in R(A^+) = R(A^T)$ (ortč.) a $n \in N(A)$ $\Rightarrow n \perp A^+b$

potom Pytagorova veta dá:

$$\|z\|_2^2 = \|A^+b + n\|_2^2 = \|A^+b\|_2^2 + \|n\|_2^2 \geq \underset{\substack{\uparrow\\ \text{minimum}}}{\|A^+b\|_2^2}.$$

(podobne pre riešenie v najm. štvorcoch.)..

Determinanty preskočíme — žiadna nová teória
— možno niektoré z príkladov do opakovanie

---

(7) Vl. vektory & vl. hodnoty

Opakovanie: $Ax = \lambda x$ — vl. vektory, vl. hodnota
$\sigma(A)$ — spektrum

- $\lambda \in \sigma(A) \Leftarrow A - \lambda I$ je sing $\Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$
- $\{ x \neq 0 \mid x \in N(A - \lambda I) \}$ — množina vl. vektorov (doplniť $x = \vec{0}$) na vl. podpriestor

$$V_\lambda = N(A - \lambda I)$$

- ľavý vl. vektor: $y^* (A - \lambda I) = 0$

---

char. polynóm — stupeň n
— má n-koreňov s násobnosťou
— ak je reálny $\chi(\lambda) \rightarrow \lambda \in \sigma(A) \Rightarrow \bar{\lambda} \in \sigma(A)$

Koeficienty $\lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + c_2 \lambda^{n-2} + \dots + c_{n-1}\lambda + c_n = 0$

$$\mathrm{trace}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = -c_1$$
$$\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = (-1)^n c_n$$
$$c_k = (-1)^k \sum (\text{všetky } k \times k \text{ hlavné minory})$$
det $k \times k$ podmatíc (riadky $i_1 i_2 \dots i_k$, stĺpce $i_1 i_2 \dots i_k$)

$$= (-1)^k \sum_{0 \le i_1 < i_2 \dots < i_k \le n} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_k}$$
k-ty sym. polynóm $\lambda_1 \dots \lambda_n$

vl. hodnoty závisia spojito od prvkov matice A

Ohraničenie: spektrálny polomer

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$$

→ každá maticová norma dá ohraničenie:

$\lambda x = A x$

$|\lambda| \|x\| = \|\lambda x\| = \|Ax\| \leq \|A\| \|x\| \rightarrow |\lambda| \leq \|A\|$

→ takýto odhad sa spraví ľahko pomocou $\| \|_1$ a $\| \|_\infty$ normy (maticovej)

Ale dá sa vylepšiť:

Geršgorinove kruhy

- vl. hodnoty $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ ležia v zjednotení G_{row} u geršgorinových kruhov:

$$|z - a_{ii}| \leq r_i, \quad \text{kde} \quad r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad \text{pre } i = 1, \dots, n.$$

- Ak zjednotenie k-kruhov disjunktné so zjednotením zvyšných $n-k$ kruhov, potom v prvej množine sa nachádza práve k vl. hodnôt.

- $\sigma(A^T) = \sigma(A)$ – t.j. podobne pre stĺpce G_{column}.

Dôkaz: Zoberme $\|x\|_\infty = \max|x_i| = 1$ a $|x_i| = 1$.

potom $\lambda x_i = [\lambda x]_i = [Ax]_i = \sum_{j=1} a_{ij} x_j \Rightarrow (\lambda - a_{ii}) x_i = \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}} a_{ij} x_j$

potom ohraničenie:

$$|\lambda - a_{ii}| = |\lambda - a_{ii}||x_i| = \left|\sum_{j \neq i} a_{ij} x_j\right| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}||x_j| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| = r_i$$

úloha b) $D = \operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$

$B = A - D$ $\quad C(t) = D + tB$ nafukovať kruhy.

· Podobnosť · $P^{-1}AP = B$ (zachováva vl. hodnoty)

· Unitárna podobnosť $U^{*}AU = B$

· diagonalizácia

Schurova veta o triangularizácii (Schurova lemma)

Dôkaz 508/509

Dôsledok Cayley-Hamilton

Násobnosti – jednoduchá — alg. násobnosť

geom. násobnosť

– polo-jednoduchá alg $mult_A(\lambda) =$ geo $mult_A(\lambda)$

---

diagonalizovateľnosť $\longleftrightarrow$ polojednoduchosť.

Spektrálna dekompozícia 517

11.1

- Schurova lema – trojuholníkový tvar

$$U^* A U = T$$

→ dôsledok Cayley-Hamiltonova veta

$$(T-\lambda_i I) = \begin{pmatrix} \times & & & & & \\ & \times & & & & \\ & & \times & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \times & \\ & & & & & \times \end{pmatrix}$$

---

geom. násobnosť, alg. násobnosť

nerovnosť medzi nimi

diagonalizovateľnosť

Funkcie diagonalizovateľných matíc

$\sin A$? ako to definovať, aby $\sin^2 A + \cos^2 A = I$?

→ nekonečné rady

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$$

→ diagonalizácia

$$A = PDP^{-1}, \quad A^k = P^{-1}D^kP^{-1}$$

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{PD^kP^{-1}}{k!} = P\left(\quad \right)P^{-1} = P^{-1}\left(\mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})\right)P^{-1}$$

→ stačí použiť obyčajnú exponenciálu pre vl. hodnoty

→ všeob. $f(A) = P\,\mathrm{diag}(f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n))P^{-1}$

je toto jednoznačné? (lebo diagonalizačná matica P nemusí byť) → pomocou spektrálneho rozkladu