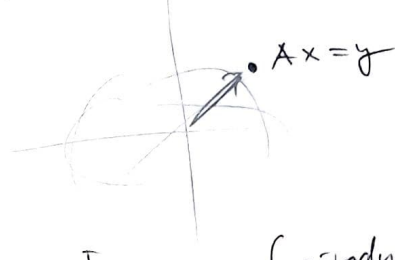
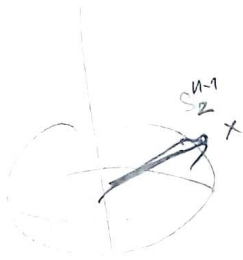


$A = U D V^T$  - regulāra matrica

$A^{-1} = V D^{-1} U^T$

$\mathbb{R}^n$

Opcionē vediet, na čō sa zobraro  
1-tkara gada v  $\mathbb{R}^2$  (vch  $\|x\|_2 = 1$ )  
sfēra



oznaime  $w = U^T y$  (sivadiņice y uzlādām)  
na U

$\|x\|_2^2 = \|A^{-1}Ax\|_2^2 = \|A^{-1}y\|_2^2 = \|VD^{-1}U^T y\|_2^2 = \|D^{-1}U^T y\|_2^2$   
U zadrināra dēļ

$= \|D^{-1}w\|_2^2 = \frac{w_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{w_2^2}{\sigma_2^2} + \dots + \frac{w_n^2}{\sigma_n^2}$  varnca elipsoidu

s polosaņi  $w_1, w_2, \dots, w_n$   
a dēžkoni  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$

3) cēllēnuk 414

Pseudo invert

konst.  $Ax=b$  mā risēnie  $x=A^+b$ , pricom tols minimalizē  
normu.

Nedā  $Ax_0=b$ . Subst.  $A=AA^+A$  dā

$b=Ax_0 = A \underbrace{A^+A}_{b} x_0 = A A^+ b$ . Teda  $A^+b$  jē nastroj risēnīm  $Ax=b$ .

Vērot risēnie mā tvar  $A^+b + N(A)$ ,  $z = A^+b + n$

lenē  $A^+b \in \mathcal{R}(A^+) = \mathcal{R}(A^T)$  (arī.) a  $n \in N(A) \Rightarrow A^+b$

pastā Pytagorara veta dā:

$\|z\|_2^2 = \|A^+b + n\|_2^2 = \|A^+b\|_2^2 + \|n\|_2^2 \geq \|A^+b\|_2^2$

↑ minimum

1 pabrēne pro risēnie v najm. Strovrosch.)

# Determinanty preskočime

- žiadna nová
- možno vietejší z príkladov do opätovania

## 7) Všetky reálne & v. hodnoty

Opätovanie:  $Ax = \lambda x$  - v. hodnoty, v. hodnota  
 $\sigma(A)$  - Spektrum

$$\lambda \in \sigma(A) \Leftrightarrow A - \lambda I \text{ je sing} \Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$$

$\{x \neq 0 \mid x \in N(A - \lambda I)\}$  - množina v. vektorov (doplňť  $x = \vec{0}$ ) na v. podpriestor

$$V_\lambda = N(A - \lambda I)$$

• ľavý v. vektor:  $y^*(A - \lambda I) = 0$

## char. polynóm

- stupen  $n$
- ak  $n$ -koreň s násobením
- ak je reálny  $\chi(\lambda) \rightarrow \lambda \in \sigma(A) \Rightarrow \lambda \in \sigma(A)$

$$\text{Koefficienty } \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + c_2 \lambda^{n-2} + \dots + c_{n-1} \lambda + c_n = 0$$

$$\text{trace}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = -c_1$$

$$\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = (-1)^n c_n$$

$$c_k = (-1)^k \sum (\text{všetky } k \times k \text{ hlavné minory})$$

↑  
det  $k \times k$  podmatic (viedky  $i_1, i_2, \dots, i_k$ )  
(stĺpce  $i_1, i_2, \dots, i_k$ )

$$= (-1)^k \sum_{0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_k}$$

↑  
 $k$ -ty sym. polynóm  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

v. hodnoty závisia spríto od  
 rozlož matice  $A$

Ohraničenie:

spektrálny polomer

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$$

→ každá maticová norma dá ohraničenie:

$$\lambda x = Ax$$

$$\|\lambda\| \|x\| = \|\lambda x\| = \|Ax\| \leq \|A\| \|x\| \rightarrow |\lambda| \leq \|A\|$$

$\rightarrow$  takýto odhad sa spravidla ľahko pomôca  $\|\cdot\|_1$  a  $\|\cdot\|_\infty$  normy (maticovej)

ale dá sa uľepšiť:

### Gershgorinove kruhy

$n$  reálnych hodnôt  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$  ležia v zjednotených  $G_{\text{row}}$  a  $G_{\text{column}}$

kruhov:

$$|z - a_{ii}| \leq r_i, \text{ kde } r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \text{ pre } i=1, \dots, n.$$

$\circ$  Ak sú zjednocené  $n$ -kruhov disjunktné so zjednotením sústredných  $n$ - $n$  kruhov, potom n prvých množín sa nachádza práve  $n$  reálnych hodnôt.

$\sigma(A^T) = \sigma(A)$  —  $i, j$  padobze pre stĺpce  $G_{\text{column}}$ .

Ditava zoberme  $\|x\|_\infty = \max |x_i| = 1$  a  $|x_i| = 1$ .

$$\text{potom } \lambda x_i = [\lambda x]_i = [Ax]_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \rightarrow (\lambda - a_{ii}) x_i = \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n a_{ij} x_j$$

podľa obmedzenia:

$$|\lambda - a_{ii}| = |\lambda - a_{ii}| |x_i| = \left| \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| |x_j| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| = r_i$$

(ak b)

$$D = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$$

$$B = A - D$$

$$C(t) = D + tB$$

trajektorie kruhov.

Podobnosť

$$P^{-1}AP = B$$

(zachovaná vl. hodnoty)

Unitárna podobnosť

$$U^*AU = B$$

diagonalizácia

Schurova veta o triangularizácii (Schurova lemma)

Dokaz 508/509

Diskusia Cayley-Hamilton

Násobnosti - jednoduchá

alg. násobnosť

geom. násobnosť

- polo-jednoduchá  $\text{alg mult}_A(\lambda) = \text{geom mult}_A(\lambda)$

diagonalizovateľnosť  $\iff$  polojednoduchosť

Spektrálna dekompozícia 517

- Schurova Lemma - trojuholníkový tvar

$$U^* A U = T$$

→ dôsledok Cayley-Hamiltonova veta

$$(T - \lambda_i I) = \begin{pmatrix} * & * & * \\ & * & * \\ & & 0 & * & * \\ & & & * & * \\ & & & & * & * \end{pmatrix}$$

geom. násobnosť, alg. násobnosť

hermitovskosť, medzi nimi

diagonalizovateľnosť

Funkcie diagonalizovateľných matic

$\sin^2 A$  ? ako to definovať, aby  $\sin^2 A + \cos^2 A = I$  ?

→ ketonečné rady

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$$

→ diagonalizácia

$$A = P^{-1} D P, \quad A^k = P^{-1} D^k P^{-1}$$

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P D^k P^{-1}}{k!} = P \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k}{k!} \right) P^{-1} = P \left( \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}) \right) P^{-1}$$

→ stačí použiť obyčajnú exponenciálu pre kt. hodnoty

→ všest.  $f(\lambda) = P \text{diag}(f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n)) P^{-1}$   
je toto jednoznačné? (lebo diagonalizácia matice P nemusí byť) → pomocou spektrálneho vzhľadu