- Schurova Lema — trojuholníkový tvar

$$U^* A U = T$$

→ dôsledok Cayley-Hamiltonova veta

$$(T-\lambda_1 I) = \begin{pmatrix} x & & & & & \\ & x & & & & \\ & & x & & & \\ & & & \ddots & 0 & \\ & & & & x & \\ & & & & & x_\lambda \end{pmatrix}$$

---

geom. násobnosť, alg. násobnosť

- vzťah medzi nimi
- diagonalizovateľnosť

Funkcie diagonalizovateľných matíc

$\sin A$? ako to definovať, aby $\sin^2 A + \cos^2 A = I$?

→ nekonečné rady

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$$

→ diagonalizácia

$$A = P^{-1} D P^{-1}, \quad A^k = P^{-1} D^k P^{-1}$$

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{PD^kP^{-1}}{k!} = P^{-1}\left(\quad \right)P^{-1} = P^{-1}\left(\operatorname{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})\right)P^{-1}$$

→ stačí použiť obyčajnú exponenciálu pre vl. hodnoty

→ všeob. $f(A) = P \operatorname{diag}(f(\lambda_1), \dots f(\lambda_n))P^{-1}$

je toto jednoznačné? (lebo diagonalizačná matica P nemusí byť) → pomocou spektrálneho rozkladu kvántik 526

7.4 systémy lin. dif rovníc

$$\frac{d e^{At}}{dt} = A e^{At}$$

$$A e^{At} = e^{At} A$$

$$e^{-At} e^{At} = I = e^{At} \cdot e^{-At} = e^{0}$$

→ $u_1' = a_{11} u_1 + \dots$

$u_n' = a_{n1} u_1 + \dots$

$u' = Au$

---

vántik 542

Normálne matice   kedy Schurova lemma dá diagonálnu maticu?

547 + dôkaz asi pozmeniť

→ kedy je T normálna?

548 vlastnosti normálnych matíc

- symetrické, Hermitovské matice

SVD a vl. hodnoty 553–555

- minule
- normálne matice sú unitárne diagonalizovateľné
špeciálne → ak sú hermitovské (reálne symetrické) → tak $\sigma \subseteq \mathbb{R}$.

Pozrime sa na Gramovu maticu A^*A a AA^*.
(resp. A^TA, AA^T v reálnom prípade)
- okrem toho, že sú hermitovské / reálne-sym., sú aj kladne semidefinitné ⇒ $\lambda = \frac{x^*A^*Ax}{x^*x} = \frac{\|Ax\|_2^2}{\|x\|_2^2} \geq 0$

ak najprv predpokladáme, že A má SVD (singulárny rozklad)

$$A = U_{m\times m}\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}_{m\times n} V^*_{n\times n}, \quad s \quad D = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$$

potom $V^*A^*AV = \underbrace{V^*V}_{I}D^*\cancel{U^*U}D\underbrace{V^*V}_{I} = \begin{pmatrix} D^2 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}_{n\times n}$

→ teda V je diagonalizačná matica pre A^*A → (σ_i^2, v_i) je pár vl. hodnota / vl. vektor pre A^*A.

Teda
→ nenulové singulárne hodnoty A sú kladné odmocniny z nenul. vl. hodnôt A^*A, pravé singulárne vektory A sú vl. vektory A^*A.
(niektoré)

podobne kladné odmocniny AA^* sú sing. hodnoty A a ich ľavé singulárne vektory u_i sú (nejaké) vl. vektory A^*A.

Pozor u_i a v_i boli zviazané podmienkou:

$Av_i = \sigma_i u_i$ pre $i = 1 \dots r$ $\quad u_i = \frac{Av_i}{\sigma_i} = \frac{Av_i}{\|Av_i\|}$

$u^*A = 0$ $\quad i = r+1, \dots, m$

$\mathrm{span}\{u_{r+1}, \dots, u_m\} = N(A^*)$

Tabuľka 555 — asi iba na internet

Kl. definitné matice — preskakujeme, väčšina bola v 1. ročníku

Jordanov tvar — druhá prednáška — bude len príklad

(na skúške iba základné veci, čo by mali byť známe z 1. roč.)

Nezáporné matice (kapitola 8)

- (matice majú reálne zložky)
- ak $a_{ij} \geq 0$ píšme $A \geq 0$, resp. $A \geq B$ ak $a_{ij} \geq b_{ij}$

  $a_{ij} > 0$ píšme $A > 0$, resp. $A > B$ ak $a_{ij} > b_{ij}$.

V aplikáciách sa nezáporné, resp. kladné matice vyskytujú často...

→ "účtovníctvo" — výrobné vzťahy, pracuje s nezápornými číslami — aj lineárne vzťahy bývajú ≥ 0

— pravdepodobnosti

---

① Kladné matice

$A_{n \times n} > 0$ → čo sa bude dať povedať o vl. vektoroch?

Pozorovanie: $A > 0 \Rightarrow \rho(A) > 0$

- ak by $\rho(A) = 0$ (spekt. polomer) → $\sigma(A) = \{0\}$, A musí mať Jordanov tvar $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ → nilpotentná matica → $\exists k$ $A^k = 0$.

Lenže ak $A > 0$ aj $A^2 > 0$...

Môžeme sa obmedziť na matice s $\rho(A) = 1$.

$A \to \frac{A}{\rho(A)}$