Tabuľka 555 — asi iba na internet

---

kl. definitné matice — preskakujeme, väčšina bola v 1. ročníku

Jordanov tvar — chýba prednáška — bude len príklad
(na skúške iba základné veci, čo by mali byť známe z 1. roč.)

Nezáporné matice (kapitola 8)

- (Matice majú reálne zložky)
- ak $a_{ij} \geq 0$ píšme $A \geq 0$, resp $A \geq B$ ak $a_{ij} \geq b_{ij}$
  $a_{ij} > 0$ píšme $A > 0$, resp $A > B$ ak $a_{ij} > b_{ij}$.

V aplikáciách sa nezáporné, resp. kladné matice vyskytujú často...
→ "účtovníctvo" — výrobné vzťahy, pracuje s nezápornými číslami — aj lineárne vzťahy bývajú ≥ 0
— pravdepodobnosti

---

① Kladné matice

$A_{n\times n} > 0$ → čo sa bude dať povedať o vl. vektoroch?

Pozorovanie! $A > 0 \Rightarrow \rho(A) > 0$

- ak by $\rho(A) = 0$ (spekt. polomer) → $\sigma(A) = \{0\}$, A musí mať Jordanov tvar $\begin{pmatrix} 0 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots \\ & & 0 \end{pmatrix}$ → nilpotentná matica → $\exists k$ $A^k = 0$.

lenže ak $A > 0$ aj $A^2 > 0$...

Môžeme sa obmedziť na matice s $\rho(A) = 1$.
$A \to \frac{A}{\rho(A)}$

pozorovania

12.2.

① • $P>0,\ x\geq 0,\ x\neq 0 \Rightarrow Px>0$

$N\geq 0,\ u\geq v\geq 0 \Rightarrow Nu\geq Nv$

$N\geq 0,\ z>0,\ Nz=0 \Rightarrow N=0$

$N\geq 0,\ N\neq 0,\ u>v>0 \rightarrow Nu>Nv$

Značenie $|.|$ - bude označovať maticu s absolútnymi hodnotami, t.j. $|x| = \begin{pmatrix} |x_1| \\ |x_2| \\ \vdots \\ |x_n| \end{pmatrix}$

• potom z trojuholníkovej nerovnosti: $|Ax| \leq |A||x|$

Resp $|A| = A \Leftrightarrow A \geq 0.$

Tvrdenie Ak $A_{n\times n} > 0$, potom

• $\rho(A) \in \sigma(A)$ (t.j. najväčšia vl. hodnota v abs hodnote je reálna, kladná)

• Ak $Ax = \rho(A)x$, potom $A|x| = \rho(A)|x|$ a $|x| > 0$.

Existuje vl. kladný vl. vektor.

Dôkaz

predpokladajme $\rho(A) = 1$. Pozrime sa na vl. vektor x pre vl. hodnotu $|\lambda| = 1$: (λ by mohlo byť z $\mathbb{C}$)

$$|x| = |\lambda||x| = |\lambda x| = |Ax| \leq |A||x| = A|x|$$

Teda $|x| \leq A|x|$

Cieľom je ukázať rovnosť. Označme $z = A|x|$. a $y = z - |x|$

Keďže máme nerovnosť, platí $y \geq 0$.

Predpokladajme $y \neq 0$, teda $\exists i : y_i > 0$

Potom $Ay > 0$ (z I), teda existuje $\varepsilon > 0 :$ $\overset{Az - \overset{z}{\overset{\shortparallel}{A|x|}}}{\overset{\shortparallel}{A}y} > \varepsilon z$

resp. $\frac{A}{1+\varepsilon} z > z$ pre $B = \frac{A}{1+\varepsilon}$ (tiež kladná matica)

máme $Bz > z$, teda aj $B^2 z > Bz > z$ ... $B^k_z > z$.

ale $\lim_{k \to \infty} B^k = 0$, lebo $\rho(B) = \frac{1}{1+\varepsilon} < 1$. → a v limite $0 > z$ spor.

---

preto $y \neq 0$ vedie k sporu, máme $0 = y = A|x| - |x| \rightarrow |x|$ je vl. vektor pre $\lambda = 1 = \rho(A)$. ∎

Ukážeme, že táto vl. hodnota je význačná

Tvrd Ak $A_{n \times n} > 0$:

- $\rho(A)$ je jediná vl. hodnota na "spektrálnej kružnici" ($|\lambda_i| < \rho(A)$ pre ost.)
- geom. nás. $\rho(A)$ = alg. nás. $\rho(A)$ (je semi-simple)

D Bez ujmy na všeob. $\rho(A) = 1$.

$0 < |x| = A|x|$

Ak $|\lambda| = 1$ a $Ax = \lambda x$, potom aj $A|x| = |\lambda||x|$

- $0 < |x_k| \neq (A|x|)_k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} |x_j|$
- $|x_k| = |\lambda||x_k| = |(\lambda x)_k| = |(Ax)_k| = \left| \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j \right|$

preto: $\left| \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j \right| = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} |x_j| = \sum_j |a_{kj} x_j|$

→ trojuholníková nerovnosť

kladné reálne

$a_{kj} x_j = \boxed{\alpha_j} a_{k1} x_1$

$x_j = \underbrace{\frac{\alpha_j a_{k1}}{a_{kj}}}_{V_0} \cdot x_1$

$x = x_1 p$

teda pre $|\lambda| = 1$ je aj $(1, \pi_2, .., \pi_n)$ vlastný vektor.

$\lambda x = Ax \rightarrow \lambda p = Ap = |Ap| = |\lambda p| = |\lambda| p = p \rightarrow \lambda = 1.$

Teda 1 je jediná vl. hodnota na jednotkovej kružnici | 12.3

(spektrálnej kružnici A).

Ak by index(1) $\geq m > 1$, potom $\|A^k\|_\infty \to \infty$ pre $k \to \infty$

(blok veľkosti $m \times m$ v Jordanovom tvare)

$J = P^{-1}AP$ $\qquad \|J^k\|_\infty = \|P^{-1}A^kP\|_\infty \leq \|P^{-1}\|_\infty \|A^k\|_\infty \|P\|_\infty$

$$\|A^k\|_\infty \geq \frac{\|J^k\|_\infty}{\|P^{-1}\|_\infty \|P\|_\infty} \to \infty$$

$$\|p\|_\infty \geq p_{ik} = \sum_{j} a_{ik}^{(k)} p_j \geq \left(\sum_j a_{ikj}^{(k)}\right)(\min_i p_i) = \|A^k\|_\infty (\min_i p_i) \to \infty$$ spor.

Násobnosť $\rho(A)$ ako vl. hodnoty

- Ak $A_{n\times n} > 0$, potom alg. násobnosť$_A$ $(\rho(A)) = 1$ – jednoduchá vl. hodnota

$\dim(N - \rho(A)I) =$ ~~g~~ nás$_A \rho(A)$ = alg. nás$_A \rho(A) = 1$.

D Nech $\rho(A) = 1$ a alg. nás. $(\lambda = 1) = m > 1$. je semisimple →

$\exists\, m$ LN vl. vektorov. pre $\lambda = 1$. ak sú LN → $x \neq \alpha y$ pre $\alpha \in \mathbb{C}$.

keď $y_i \neq 0$, $z = x - \frac{x_i}{y_i} y$ → z je LK vl. vektorov, aj $Az = z$,

preto $A|z| = |z| > 0$ ale $z_i = x_i - \frac{x_i}{y_i} y_i = 0$ spor.

→ teda $m = 1$.

→ dôsledok: existuje jediný vl. vektor $p \in N(A - \rho(A)I)$

ktorý je kladný $p > 0$ a $\sum p_i = 1$. $\left(p = \frac{v}{\|v\|_1}\right)$

– perronov vektor, resp. perronov koreň matice A.

keďže $A > 0 \Rightarrow A^T > 0$ a $\rho(A) = \rho(A^T)$

– existuje pár (r, p) a aj (r, q) pre A^T – ľavý perronov koreň.

- žiadne ďalšie kladné vl. vektory

---

666 (λ, y) $y \geq 0$, $x > 0$ $\rightarrow x^T y > 0$

↑ Perronov vektor pre A^T

$\rho(A) x^T = x^T A \Rightarrow \rho(A) x^T y = x^T A y = \lambda x^T y \Rightarrow \rho(A) = \lambda$ ∎

Collatz- Wielandt

Perronov koreň spĺňa $r = \max_{x \in N} f(x)$

kde $f(x) = \min_{\substack{1 \leq i \leq n \\ x_i \neq 0}} \frac{[Ax]_i}{x_i}$ $N = \{x \mid x \geq 0 \text{ pre } x \neq 0\}$

$D = ?$

Zhrnutie (rámček 667)

Frobeniova veta – rozšírenie pre nezáporné

- príklad permutačné matice – viacero vl. hodnôt na spektrálnej kružnici.

Markovské matice