

Úlohy (strany a číslovanie) sú z knihy Carla D. Meyera *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*.

1. (7.1.7) Vysvetlite, prečo by malo byť na prvý pohľad zjavné, že nula nie je vlastnou hodnotou matice  $A_{n \times n} = \begin{pmatrix} n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & n & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n \end{pmatrix}$ , a teda je  $A$  regulárna.

2. (7.1.8) Zdôvodnite prečo sú vlastné hodnoty  $A^*A$  a  $AA^*$  reálne a nezáporné pre  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ .  
*Návod:* Uvažujte  $\|Ax\|_2^2/\|x\|_2^2$ . Kedy sú vlastné hodnoty  $A^*A$  a  $AA^*$  kladné (ostrá nerovnosť)?

3. (7.1.10) a) Ukážte, že ak  $(\lambda, x)$  je pár vlastná hodnota – vlastný vektor pre maticu  $A$ , potom  $(\lambda^k, x)$  tvorí taký pár pre  $A^k$ , kde  $k$  je ľubovoľné kladné celé číslo.

b) Ak  $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_k x^k$  je ľubovoľný polynóm, definujme  $p(A)$  ako

$$p(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \dots + \alpha_k A^k.$$

Ukážte, že ak  $(\lambda, x)$  je pár vlastná hodnota – vlastný vektor pre maticu  $A$ , potom  $(p(\lambda), x)$  tvorí taký pár pre  $p(A)$ .

4. (7.1.11) Vysvetlite ako z Geršgorinovej vety vyplýva, že  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  musí mať aspoň dve reálne vlastné hodnoty. Následne overte výpočtom.

5. (7.1.12) Zdôvodnite, že ak  $A$  je nilpotentná matica ( $A^k = 0$  pre nejaké  $k$ ), tak  $\text{Tr}(A) = 0$ .

*Návod:* Aké je  $\sigma(A)$ ?

6. (7.1.17) Nech  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  sú vlastné hodnoty  $A_{n \times n}$  a  $(\lambda_k, c)$  je jeden z párov vlastná hodnota – vlastný vektor.

a) Vysvetlite prečo pre  $\lambda \notin \sigma(A)$  platí  $(A - \lambda I)^{-1}c = c/(\lambda_k - \lambda)$ .

b) Pre ľubovoľný vektor  $d_{n \times 1}$  dokážte, že vlastné hodnoty matice  $A + cd^T$  sa zhodujú s vlastnými hodnotami matice  $A$ , s tým, že  $\lambda_k$  sa nahradí  $\lambda_k + d^T c$ .

c) Ako sa dá vybrať  $d$ , aby sa vlastné hodnoty matíc  $A + cd^T$  a  $A$  zhodovali, s výnimkou toho, že  $\lambda_k$  sa nahradí predpísaným číslom  $\mu$ ?

7. (7.1.18) Nech  $A$  je štvorcová matica.

a) Zdôvodnite prečo majú  $A$  a  $A^T$  rovnaké vlastné hodnoty.

b) Zdôvodnite prečo  $\lambda \in \sigma(A) \Rightarrow \bar{\lambda} \in \sigma(A^*)$ .

*Návod:* Čo je  $\chi_{A^*}(\bar{\lambda})$ ?

c) Vyplýva z predošlých výsledkov, že  $\lambda \in \sigma(A) \Leftrightarrow \bar{\lambda} \in \sigma(A)$ , ak má matica  $A$  reálne zložky?

d) Nenulový riadkový vektor  $y^*$  sa nazýva ľavý vlastný vektor matice  $A$ , ak existuje skalár  $\mu$ , pre ktorý  $y^*(A - \mu I) = 0$ . Zdôvodnite, prečo musí byť  $\mu$  aj “pravostranná” vlastná hodnota matice  $A$ , ak má  $A$  reálne zložky.

8. (7.1.19) Uvažujme matice  $A_{m \times n}$  a  $B_{n \times m}$ .

a) Zdôvodnite prečo  $AB$  a  $BA$  majú tie isté charakteristické polynómy, ak  $m = n$ . *Návod:* pozri 6.2.16

b) Vysvetlite, prečo musia byť charakteristické polynómy  $AB$  a  $BA$  rôzne ak  $m \neq n$ , a potom zdôvodnite, prečo sa  $\sigma(AB)$  a  $\sigma(BA)$  zhodujú s možnou výnimkou nulovej vlastnej hodnoty.

9. (7.1.20) Ak  $AB = BA$ , dokážte, že  $A$  a  $B$  majú spoločný vlastný vektor.

*Návod:* Nech pre  $\lambda \in \sigma(A)$  tvoria stĺpce matice  $X$  bázu podpriestoru  $\mathcal{N}(A - \lambda I)$ . Ukážte, že  $(A - \lambda I)BX = 0$  a zdôvodnite, prečo musí existovať štvorcová matica  $P$  splňajúca  $BX = XP$ . Zamerajte sa potom na (ľubovoľný) vlastný vektor a príslušnú vlastnú hodnotu matice  $P$ .

**10.** (7.1.21) Pre fixné matice  $P_{m \times m}$  a  $Q_{n \times n}$  definujme lineárny operátor  $T$  na  $M_{m \times n}(\mathbb{C})$  predpisom  $T(A) = PAQ$ .

a) Ukážte, že ak  $x$  je pravý vlastný vektor pre  $P$  a  $y^*$  je ľavý vlastný vektor pre  $Q$ , potom  $xy^*$  je vlastný vektor pre  $T$ .

b) Vysvetlite prečo  $\text{Tr}(T) = \text{Tr}(P) \text{Tr}(Q)$ .

**11.** (7.1.23) *Newtonove rovnosti* Nech  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sú korene polynómu  $p(\lambda) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \dots + c_n$  a označme  $\tau_k = \lambda_1^k + \lambda_2^k + \dots + \lambda_n^k$ . Newtonove rovnosti hovoria, že  $c_k = -(\tau_1 c_{k-1} + \tau_2 c_{k-2} + \dots + \tau_{k-1} c_1 + \tau_k)/k$ . Odvoďte tieto rovnosti pomocou nasledujúcich krokov:

a) Ukážte, že  $p'(\lambda) = p(\lambda) \sum_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i)^{-1}$  (*logaritmická derivácia*).

b) Použite rozvoj geometrického radu pre  $(\lambda - \lambda_i)^{-1}$  na dôkaz rovnosti

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda - \lambda_i} = \frac{n}{\lambda} + \frac{\tau_1}{\lambda^2} + \frac{\tau_2}{\lambda^3} + \dots,$$

pre  $|\lambda| > \max_i |\lambda_i|$ .

c) Porovnajte tieto dva výsledky pre príslušné mocniny  $\lambda$ .

**12** (7.2.21) Predpokladajme, že  $(\lambda, x)$  a  $(\mu, y^*)$  sú pravý pár vlastná hodnota/vlastný vektor, resp. ľavý pár vlastná hodnota/vlastný vektor pre  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ , t.j.  $Ax = \lambda x$  a  $y^* A = \mu y^*$ . Vysvetlite prečo  $y^* x = 0$  ak  $\lambda \neq \mu$ .