

Úlohy (strany a číslovanie) sú z knihy Carla D. Meyera *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*.

**1.** (7.2.7) Nech  $\{x_1, x_2, \dots, x_t\}$  je množina lineárne nezávislých vlastných vektorov matice  $A_{n \times n}$  prislúchajúcich vlastným hodnotám  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t\}$  a nech  $X$  je ľubovoľná  $n \times (n - t)$  matica taká,

že  $P_{n \times n} = (x_1 | \dots | x_t | X)$  je regulárna. Ukážte, že ak  $P^{-1}$  má tvar  $P^{-1} = \begin{pmatrix} y_1^* \\ \vdots \\ y_t^* \\ Y^* \end{pmatrix}$ , kde  $y_i^*$  sú riad-

kové vektory a  $Y^*$  je typu  $(n - t) \times n$ , potom  $\{y_1^*, y_2^*, \dots, y_t^*\}$  sú lineárne nezávislé ľavé vlastné vektory prislúchajúce  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t\}$  – t.j.  $y_i^* A = \lambda_i y_i^*$ .

**2.** (7.2.15) Ukážte, že ak  $AB = BA$ , potom sa matice  $A$  a  $B$  dajú súčasne previesť na trojuholníkový tvar – t.j.  $U^* A U = T_1$  a  $U^* B U = T_2$  pre nejakú unitárnu maticu  $U$ .

*Návod:* Pozri 7.1.20 a dôkaz Schurovej lemy.

**3.** (7.2.16) Ukážte, že pre diagonalizovateľné matice platí  $AB = BA$  práve vtedy, keď sa dajú  $A$  a  $B$  súčasne diagonalizovať – t.j.  $P^{-1} A P = D_1$  a  $P^{-1} B P = D_2$  pre nejakú maticu  $P$ .

*Návod:* Ak  $A$  a  $B$  komutujú, potom komutujú aj  $P^{-1} A P = \begin{pmatrix} \lambda_1 I & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$  a  $P^{-1} B P = \begin{pmatrix} W & X \\ Y & Z \end{pmatrix}$ .

**4.** (7.2.19) Nech  $N_{n \times n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$ .

a) Ukážte, že  $\lambda \in \sigma(N + N^T)$  práve vtedy, keď  $i\lambda \in \sigma(N - N^T)$ .

b) Vysvetlite prečo  $N + N^T$  je regulárna práve vtedy, keď je  $n$  párne.

c) Nájdite hodnotu podielu  $\det(N - N^T) / \det(N + N^T)$  pre párne  $n$ .

**5.** (7.2.20) Toeplitzova matica tvaru

$$C = \begin{pmatrix} c_0 & c_{n-1} & c_{n-2} & \dots & c_1 \\ c_1 & c_0 & c_{n-1} & \dots & c_2 \\ c_2 & c_1 & c_0 & \dots & c_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-1} & c_{n-2} & c_{n-3} & \dots & c_0 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

sa nazýva *cirkulantná matica*. Ak  $p(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_{n-1} x^{n-1}$  a  $\{1, \xi, \xi^2, \dots, \xi^{n-1}\}$  sú  $n$ -té odmocniny z jednotky, potom podľa 5.8.12 platí

$$F_n C F_n^{-1} = \begin{pmatrix} p(1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p(\xi) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p(\xi^{n-1}) \end{pmatrix},$$

kde  $F_n$  je Fourierova matica rádu  $n$ . Overte priamym výpočtom vlastných hodnôt a vlastných vektorov pre cirkulantnú maticu

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. (7.3.6) Vysvetlite prečo platí  $\det(e^A) = e^{\text{Tr}(A)}$ .

7. (7.3.9) Vysvetlite prečo  $e^{A+B} = e^A e^B$  ak  $AB = BA$ . Nájdite príklad, kde sa  $e^{A+B}$ ,  $e^A e^B$  a  $e^B e^A$  navzájom líšia ak  $AB \neq BA$ .

*Návod:* Cvičenie 7.2.16 pre diagonalizovateľný prípad; vo všeobecnosti sa pozrite na  $F(t) = e^{(A+B)t} - e^{(A)t} e^{(B)t}$  a  $F'(t)$ .

8. (7.3.10) Ukážte, že  $e^A$  je ortogonálna matica, ak  $A$  je reálna antisymetrická.

9. (7.3.12) *Spektrálny polomer* matice  $A$  je  $\rho(A) = \max_{\lambda_i \in \sigma(A)} |\lambda_i|$ . Ukážte, že ak je  $A$  diagonalizovateľná, potom

$$\rho(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{1/n} \quad \text{pre každú maticovú normu.}$$

Tento výsledok platí tiež aj pre nediagonalizovateľné matice, ale dôkaz je komplikovanejší (pozri Príklad 7.10.1, str. 619).

10. (7.4.1) Predpokladajme, že  $A_{n \times n}$  je diagonalizovateľná a  $P = (x_1 | x_2 | \dots | x_n)$  je matica, ktorej stĺpce tvoria úplnú sadu lineárne nezávislých vektorov zodpovedajúcich vlastným hodnotám,  $\lambda_i$ . Ukážte, že riešenie systému  $u' = Au$ ,  $u(0) = c$  sa dá napísať ako

$$u(t) = \xi_1 e^{\lambda_1 t} x_1 + \xi_2 e^{\lambda_2 t} x_2 + \dots + \xi_n e^{\lambda_n t} x_n,$$

kde koeficienty  $\xi_i$  získame ako riešenie systému  $P\xi = c$ .

11. (7.5.3) Ukážte, že  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  je normálna a má reálne vlastné hodnoty práve vtedy, keď je  $A$  symetrická.

12. (7.5.4) Ukážte, že vlastné hodnoty reálnej antisymetrickej alebo antihermitovskej matice musia byť rýdzo imaginárne čísla (t.j. reálne násobky  $i$ ).

13. (7.5.10) Ukážte, že pre normálnu maticu  $A$  je  $(\lambda, x)$  pár vlastná hodnota – vlastný vektor práve vtedy, keď je  $(\bar{\lambda}, x)$  takým párom pre maticu  $A^*$ .