

Úlohy (strany a číslovanie) sú z knihy Carla D. Meyera *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*.

1. (4.6.10) V aplikáciách metódy najmenších štvorcov sa často stane, že matica dát $A_{m \times n}$ nemá lineárne nezávislé stĺpce, t.j. $h(A) < n$, a následne príslušný systém normálnych rovníc $A^T A x = A^T b$ nemá jednoznačné riešenie. To potom znamená, že aj nejaká odhadovaná veličina y , ktorá je lineárnou funkciou hľadaných parametrov $x = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T$, napr.

$$y = \alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2 + \dots + \alpha_n t_n + \varepsilon,$$

môže nadobúdať pre nekonečne veľa riešení x nekonečne veľa rôznych hodnôt, čo je nežiaduce.

V takom prípade má zmysel obmedziť sa iba na tie n -tice (t_1, t_2, \dots, t_n) , ktoré ležia v riadkovom priestore matice A .

Ukážte, že ak

$$t = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} \in \mathcal{R}(A^T) \quad \text{a} \quad x = \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_1 \\ \hat{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_n \end{pmatrix}$$

je ľubovoľné riešenie $Ax = b$ v najmenších štvorcoch (t.j. $A^T A x = A^T b$), potom je odhad

$$\hat{y} = t^T x = \sum_{i=1}^n t_i \hat{\alpha}_i$$

jednoznačný v tom, že nezávisí od voľby konkrétneho riešenia x v najmenších štvorcoch.

2. (5.9.7) Predpokladajme, že $\mathcal{V} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$ a P je projektor na \mathcal{X} v smere \mathcal{Y} . Ukážte, že platí

$$\mathcal{R}(P) = \mathcal{N}(I - P) = \mathcal{X} \quad \text{a} \quad \mathcal{R}(I - P) = \mathcal{N}(P) = \mathcal{Y}.$$

3. (5.9.12) Nech P a Q sú projekčné operátory.

(a) Ukážte, že $\mathcal{R}(P) = \mathcal{R}(Q)$ práve vtedy, keď $PQ = Q$ a $QP = P$.

(b) Ukážte, že $\mathcal{N}(P) = \mathcal{N}(Q)$ práve vtedy, keď $PQ = P$ a $QP = Q$.

(c) Ukážte, že ak E_1, E_2, \dots, E_k sú projektory s rovnakým obrazom a $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ sú skaláry spĺňajúce $\sum_j \alpha_j = 1$, potom je aj $\sum_j \alpha_j E_j$ projektor.

4. (5.9.17) Majme reálny alebo komplexný vektorový priestor, E je projektor na \mathcal{X}_1 v smere \mathcal{Y}_1 a F je projektor na \mathcal{X}_2 v smere \mathcal{Y}_2 . Ukážte, že $E + F$ je projektor práve vtedy, keď $EF = FE = 0$, a v tom prípade $\mathcal{R}(E + F) = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$ a $\mathcal{N}(E + F) = \mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{Y}_2$.

5. (5.9.18) Majme reálny alebo komplexný vektorový priestor, E je projektor na \mathcal{X}_1 v smere \mathcal{Y}_1 a F je projektor na \mathcal{X}_2 v smere \mathcal{Y}_2 . Ukážte, že $E - F$ je projektor práve vtedy, keď $EF = FE = F$, a v tom prípade $\mathcal{R}(E - F) = \mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2$ a $\mathcal{N}(E - F) = \mathcal{Y}_1 \oplus \mathcal{X}_2$.

Návod: P je projektor práve vtedy, keď je $(I - P)$ projektor.

6. (5.9.19) Majme reálny alebo komplexný vektorový priestor, E je projektor na \mathcal{X}_1 v smere \mathcal{Y}_1 a F je projektor na \mathcal{X}_2 v smere \mathcal{Y}_2 . Ukážte, že ak $EF = P = FE$, potom P je projektor na $\mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2$ v smere $\mathcal{Y}_1 + \mathcal{Y}_2$.

7. (5.9.20) *Vnútorňý pseudoinverz* pre $A_{m \times n}$ je matica $X_{n \times m}$ spĺňajúca $AXA = A$, a *vonkajší pseudoinverz* pre A je matica X spĺňajúca $XAX = X$. Ak je X zároveň vonkajší aj vnútorňý pseudoinverz, nazýva sa *reflexívny pseudoinverz*.

(a) Ak $Ax = b$ je konzistentný systém m rovníc o n neznámych a A^- je ľubovoľný vnútorňý pseudoinverz matice A , zdôvodnite prečo sa dá množina všetkých riešení $Ax = b$ vyjadriť ako

$$A^-b + \mathcal{R}(I - A^-A) = \{A^-b + (I - A^-A)h \mid h \in \mathbb{R}^n\}.$$

(b) Nech \mathcal{M} a \mathcal{L} sú nejaké komplementárne priestory k $\mathcal{R}(A)$ a $\mathcal{N}(A)$, t.j. $\mathbb{C}^m = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{M}$ a $\mathbb{C}^n = \mathcal{L} \oplus \mathcal{N}(A)$. Ukážte, že existuje jediný reflexívny pseudoinverz X matice A spĺňajúci $\mathcal{R}(X) = \mathcal{L}$ a $\mathcal{N}(X) = \mathcal{M}$. Ukážte, že $X = QA^-P$, kde A^- je ľubovoľný vnútorný pseudoinverz pre A , P je projektor na $\mathcal{R}(A)$ v smere \mathcal{M} a Q je projektor na \mathcal{L} v smere $\mathcal{N}(A)$.

8. (5.13.3) Ukážte, že pre ortogonálny projektor P platí $\|Px\| = \|x\|$ práve vtedy, keď $x \in \mathcal{R}(P)$.

9. (5.13.4) Vysvetlite prečo $A^T P_{\mathcal{R}(A)} = A^T$ pre $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$.

10. (5.13.5) Vysvetlite prečo $P_{\mathcal{M}} = \sum_{i=1}^r u_i u_i^T$, ak $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ je nejaká ortonormálna báza podpriestoru $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$.

11.(5.13.13) Nech \mathcal{M} a \mathcal{N} sú podpriestory priestoru \mathcal{V} a $P_{\mathcal{M}}, P_{\mathcal{N}}$ sú príslušné ortogonálne projekčné operátory.

(a) Ukážte, že $P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{N}} = 0$ práve vtedy, keď $\mathcal{M} \perp \mathcal{N}$.

(b) Je pravdou, že $P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{N}} = 0$ práve vtedy, keď $P_{\mathcal{N}}P_{\mathcal{M}} = 0$? Vysvetlite.