Maticový počet – Úloha č. 6

Cvičenia v týždni 1. novembra 2021

Úlohy (strany a číslovanie) sú z knihy Carla D. Meyera *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra.*

Zostali nám ešte niektoré príklady z minulých úloh ...

1. Nech X a Y sú podpriestory $\mathbb{R}^3$ generované

$$\mathcal{B}_X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \qquad \text{a} \qquad \mathcal{B}_Y = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

a) Zdôvodnite prečo sú X a Y komplementárne, t.j. $\mathbb{R}^3 = X \oplus Y$.
b) Nájdite maticu P šikmej projekcie na X v smere Y, ako aj komplementárnu maticu Q šikmej projekcie na Y v smere X.
c) Nájdite projekciu vektora $v = (2, -1, 1)^T$ na X v smere Y a projekciu v na Y v smere X.

2. (5.13.14) Nech $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ sú podpriestory priestoru $\mathcal{V}$ a $P_{\mathcal{M}}$, $P_{\mathcal{N}}$ sú príslušné ortogonálne projekčné operátory.
(a) Ukážte, že $\mathcal{R}(P_{\mathcal{M}} + P_{\mathcal{N}}) = \mathcal{R}(P_{\mathcal{M}}) + \mathcal{R}(P_{\mathcal{N}}) = \mathcal{M} + \mathcal{N}$.
(b) Vysvetlite prečo $\mathcal{M} \perp \mathcal{N}$ práve vtedy, keď $P_{\mathcal{M}} P_{\mathcal{N}} = 0$.
(b) Zdôvodnite, prečo je $P_{\mathcal{M}} + P_{\mathcal{N}}$ projekčný operátor práve vtedy, keď $P_{\mathcal{M}} P_{\mathcal{N}} = 0$. V tom prípade $\mathcal{R}(P_{\mathcal{M}} + P_{\mathcal{N}}) = \mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$ a $\mathcal{M} \perp \mathcal{N}$.

3. (5.13.15) *Andersonova–Duffinova formula.* Ukážte, že ak $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ sú podpriestory toho istého priestoru, potom ortogonálny projektor na $\mathcal{M} \cap \mathcal{N}$ je daný vzorcom $P_{\mathcal{M} \cap \mathcal{N}} = 2P_{\mathcal{M}}(P_{\mathcal{M}} + P_{\mathcal{N}})^{\dagger} P_{\mathcal{N}}$.
Návod: Použite vzťah (5.13.12, str. 435) a predošlé cvičenie na odvodenie $P_{\mathcal{M}}(P_{\mathcal{M}} + P_{\mathcal{N}})^{\dagger} P_{\mathcal{N}} = P_{\mathcal{N}}(P_{\mathcal{M}} + P_{\mathcal{N}})^{\dagger} P_{\mathcal{M}}$. Označiac $Z = 2P_{\mathcal{M}}(P_{\mathcal{M}} + P_{\mathcal{N}})^{\dagger} P_{\mathcal{N}}$, z toho odvoďte $Z = P_{\mathcal{M} \cap \mathcal{N}} Z = P_{\mathcal{M} \cap \mathcal{N}}$.

4. (5.5.3) Použite Gram–Schmidtov proces so štandardným hermitovským skalárnym súčinom v $\mathbb{C}^3$ na vektory $\left\{ \begin{pmatrix} i \\ i \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} \right\}$.

5. (5.5.5) Vysvetlite, čo sa stane, ak sa Gram–Schmidtova ortogonalizácia použije na lineárne závislú množinu vektorov.

6. (5.5.8) Ukážte, že ak $h(A_{m \times n}) = n$, potom je obdĺžnikový QR rozklad matice A jednoznačný. T.j. ak $A = QR$, kde $Q_{m \times n}$ má ortonormálne stĺpce a $R_{n \times n}$ je horná trojuholníková s kladnými zložkami na diagonále, potom sú Q a R určené jednoznačne.

7. (5.5.11) Nech $\mathcal{V}$ je priestor spojitých reálnych funkcií na intervale $[-1, 1]$ so skalárnym súčinom definovaným ako

$$\langle f \,|\, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) g(x) dx$$

a $\mathcal{S}$ je podpriestor $\mathcal{V}$ generovaný troma lineárne nezávislými polynómami $p_0 = 1$, $p_1 = x$ a $p_2 = x^2$.
(a) Použite Gram–Schmidtovu ortogonalizáciu na nájdenie ortogonálnej množiny $\{q_0, q_1, q_2\}$, ktorá generuje $\mathcal{S}$. Toto sú prvé tri tzv. normalizované *Legendrove polynómy.*
(b) Overte, že q_n spĺňajú *Legendrovu diferenciálnu rovnicu*

$$(1 - x^2) y'' - 2xy' + n(n+1) y = 0$$

pre $n = 0, 1, 2$.