Maticový počet – Úloha č. 7

Cvičenia v týždni 15. novembra 2021

Úlohy (strany a číslovanie) sú z knihy Carla D. Meyera *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra.*

1. (5.1.3) Ukážte, že $(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)^2 \le n(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2)$ pre $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

2. (5.1.5) Ak $x, y \in \mathbb{R}^n$ spĺňajú $\|x+y\|_2 = \|x-y\|_2$, čo sa dá povedať o $x^T y$?

3. (5.1.7) Ukážte, že každá vektorová norma na $\mathbb{C}^n$ závisí spojito od zložiek vektora, t.j. pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že $|\|x\| - \|y\|| < \varepsilon$ ak $|x_i - y_i| < \delta$ pre každé i.

4. (5.1.8) a) Ukážte, že pre $x \in \mathbb{C}^n$ platí $\|x\|_1 \ge \|x\|_2 \ge \|x\|_\infty$.
b) Ukážte, že pre $x \in \mathbb{C}^n$ platí $\|x\|_i \ge \alpha \|x\|_j$, kde α je (i,j)-ta zložka matice:

$$\begin{pmatrix} * & \sqrt{n} & n \\ 1 & * & \sqrt{n} \\ 1 & 1 & * \end{pmatrix}.$$

5. (5.1.11) Použite Hölderovu nerovnosť na dôkaz toho, že ak súčet zložiek vektora $x \in \mathbb{R}^n$ je nulový (t.j. $x^T e = 0$ pre $e^T = (1, 1, \dots, 1)$), potom

$$|x^T y| \le \|x\|_1 \left(\frac{y_{\max} - y_{\min}}{2} \right) \quad \text{pre všetky } y \in \mathbb{R}^n.$$

6. (5.2.3) a) Vysvetlite prečo $\|I\| = 1$ pre každú indukovanú maticovú normu.
b) Aká je hodnota $\|I_{n\times n}\|_F$?

7. (5.2.6) Ukážte, že pre maticovú 2-normu (indukovanú euklidovskou vektorovou normou) platí
a) $\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \max_{\|y\|_2=1} |y^* A x|$,
b) $\|A\|_2 = \|A^*\|_2$,
c) $\|A^* A\|_2 = \|A\|_2^2$,
d) $\left\|\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix} \right)\right\|_2 = \max\{\|A\|_2, \|B\|_2\}$,
e) $\|U * AV\|_2 = \|A\|_2$, ak $UU^* = I$ a $VV^* = I$.

8. (5.2.7) Ukážte, že pre regulárnu maticu A indukovaná norma spĺňa

$$\|A\| = \frac{1}{\min_{\|x\|=1} \|A^{-1}x\|}, \qquad \text{čo je ekvivalentné} \qquad \|A^{-1}\| = \frac{1}{\min_{\|x\|=1} \|Ax\|}.$$

9. (5.2.8) Pre $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ a parameter $z \in \mathbb{C}$ sa matica $R(z) = (zI - A)^{-1}$ nazýva *rezolventa A.* Ukážte, že ak $|z| > \|A\|$ pre ľubovoľnú indukovanú maticovú normu, potom

$$\|R(z)\| \le \frac{1}{|z| - \|A\|}.$$

10. (5.9.8) Ukážte, že $\|P\|_2 \ge 1$ pre každý projekčný operátor $P \ne 0$. Kedy platí rovnosť $\|P\|_2 = 1$?

11. (5.9.9) Vysvetlite prečo platí $\|I - P\|_2 = \|P\|_2$ pre všetky projektory, ktoré sú nenulové a nerovnajú sa identite.

12. (5.9.10) Ukážte, že pre $u, v \in \mathbb{R}^n$ spĺňajúce $v^T u = 1$ platí:

$$\|I - uv^T\|_2 = \|uv^T\|_2 = \|u\|_2 \|v\|_2 = \|uv^T\|_F.$$