Maticový počet – Úloha č. 10

Cvičenia v týždni 5. decembra 2022

Úlohy (strany a číslovanie) sú z knihy Carla D. Meyera *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra.*

1. (7.1.7) Vysvetlite, prečo by malo byť na prvý pohľad zjavné, že nula nie je vlastnou hodnotou matice $A_{n\times n} = \begin{pmatrix} n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & n & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n \end{pmatrix}$, a teda je A regulárna.

2. (7.1.8) Zdôvodnite prečo sú vlastné hodnoty A^*A a AA^* reálne a nezáporné pre $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$.
Návod: Uvažujte $\|Ax\|_2^2/\|x\|_2^2$. Kedy sú vlastné hodnoty A^*A a AA^* kladné (ostrá nerovnosť)?

3. (7.1.10) a) Ukážte, že ak (λ, x) je pár vlastná hodnota – vlastný vektor pre maticu A, potom (λ^k, x) tvorí taký pár pre A^k, kde k je ľubovoľné kladné celé číslo.
b) Ak $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_k x^k$ je ľubovoľný polynóm, definujme $p(A)$ ako

$$p(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \dots + \alpha_k A^k.$$

Ukážte, že ak (λ, x) je pár vlastná hodnota – vlastný vektor pre maticu A, potom $(p(\lambda), x)$ tvorí taký pár pre $p(A)$.

4. (7.1.11) Vysvetlite ako z Geršgorinovej vety vyplýva, že $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ musí mať aspoň dve reálne vlastné hodnoty. Následne overte výpočtom.

5. (7.1.12) Zdôvodnite, že ak A je *nilpotentná* matica ($A^k = 0$ pre nejaké k), tak $\mathrm{Tr}(A) = 0$.
Návod: Aké je $\sigma(A)$?

6. (7.1.17) Nech $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ sú vlastné hodnoty $A_{n\times n}$ a (λ_k, c) je jeden z párov vlastná hodnota – vlastný vektor.
a) Vysvetlite prečo pre $\lambda \notin \sigma(A)$ platí $(A - \lambda I)^{-1} c = c/(\lambda_k - \lambda)$.
b) Pre ľubovoľný vektor $d_{n\times 1}$ dokážte, že vlastné hodnoty matice $A + cd^T$ sa zhodujú s vlastnými hodnotami matice A, s tým, že λ_k sa nahradí $\lambda_k + d^T c$.
c) Ako sa dá vybrať d, aby sa vlastné hodnoty matíc $A + cd^T$ a A zhodovali, s vynimkou toho, že λ_k sa nahradí predpísaným číslom μ?

7. (7.1.18) Nech A je štvorcová matica.
a) Zdôvodnite prečo majú A a A^T rovnaké vlastné hodnoty.
b) Zdôvodnite prečo $\lambda \in \sigma(A) \Rightarrow \bar{\lambda} \in \sigma(A^*)$.
Návod: Čo je $\overline{\chi_{A^*}(\bar{\lambda})}$?
c) Vyplýva z predošlých výsledkov, že $\lambda \in \sigma(A) \Leftrightarrow \bar{\lambda} \in \sigma(A)$, ak má matica A reálne zložky?
d) Nenulový riadkový vektor y^* sa nazýva *ľavý* vlastný vektor matice A, ak existuje skalár μ, pre ktorý $y^*(A - \mu I) = 0$. Zdôvodnite, prečo musí byť μ aj "pravostranná" vlastná hodnota matice A, ak má A reálne zložky.

8. (7.1.19) Uvažujme matice $A_{m\times n}$ a $B_{n\times m}$.
a) Zdôvodnite prečo AB a BA majú tie isté charakteristické polynómy, ak $m = n$. *Návod:* pozri 6.2.16
b) Vysvetlite, prečo musia byť charakteristické polynómy AB a BA rôzne ak $m \neq n$, a potom zdôvodnite, prečo sa $\sigma(AB)$ a $\sigma(BA)$ zhodujú s možnou výnimkou nulovej vlastnej hodnoty.

9. (7.1.20) Ak $AB = BA$, dokážte, že A a B majú spoločný vlastný vektor.

Návod: Nech pre $\lambda \in \sigma(A)$ tvoria stĺpce matice X bázu podpriestoru $\mathcal{N}(A - \lambda I)$. Ukážte, že $(A - \lambda I)BX = 0$ a zdôvodnite, prečo musí existovať štvorcová matica P spĺňajúca $BX = XP$. Zamerajte sa potom na (ľubovoľný) vlastný vektor a príslušnú vlastnú hodnotu matice P.

10. (7.1.21) Pre fixné matice $P_{m\times m}$ a $Q_{n\times n}$ definujme lineárny operátor T na $M_{m\times n}(\mathbb{C})$ predpisom $T(A) = PAQ$.

a) Ukážte, že ak x je pravý vlastný vektor pre P a y^* je ľavý vlastný vektor pre Q, potom xy^* je vlastný vektor pre T.

b) Vysvetlite prečo $\mathrm{Tr}(T) = \mathrm{Tr}(P)\,\mathrm{Tr}(Q)$.

11. (7.1.23) *Newtonove rovnosti* Nech $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sú korene polynómu $p(\lambda) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \cdots + c_n$ a označme $\tau_k = \lambda_1^k + \lambda_2^k + \cdots + \lambda_n^k$. Newtonove rovnosti hovoria, že $c_k = -(\tau_1 c_{k-1} + \tau_2 c_{k-2} + \cdots + \tau_{k-1}c_1 + \tau_k)/k$. Odvoďte tieto rovnosti pomocou nasledujúcich krokov:

a) Ukážte, že $p'(\lambda) = p(\lambda)\sum_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i)^{-1}$ (*logaritmická derivácia*).

b) Použite rozvoj geometrického radu pre $(\lambda - \lambda_i)^{-1}$ na dôkaz rovnosti

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda - \lambda_i} = \frac{n}{\lambda} + \frac{\tau_1}{\lambda^2} + \frac{\tau_2}{\lambda^3} + \ldots,$$

pre $|\lambda\| > \max_i |\lambda_i|$.

c) Porovnajte tieto dva výsledky pre príslušné mocniny λ.

12 (7.2.21) Predpokladajme, že (λ, x) a (μ, y^*) sú pravý pár vlastná hodnota/vlastný vektor, resp. ľavý pár vlastná hodnota/vlastný vektor pre $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, t.j. $Ax = \lambda x$ a $y^*A = \mu y^*$. Vysvetlite prečo $y^*x = 0$ ak $\lambda \neq \mu$.