

Podvázanie pri písomke je vážnym porušením Študijného poriadku FMFI UK, ktoré môže viesť k vylúčeniu zo štúdia. Nerobte hlúposti. Počas písomky je zakázané používať komunikačné nástroje a informačné zdroje. Veľa zdaru!

Písomka z Maticového počtu, 30. november 2021

1. Nájdite maticu šikmej projekcie $P_{U(V)}$ na podpriestor $U = \text{span}[(1, 0, 1)^T, (1, 1, 0)^T]$ v smere podpriestoru $V = \text{span}[(0, 1, 1)^T]$. Ako vyzerá matica $P_{V(U)}$ šikmej projekcie na V v smere U ? A ako vyzerá matica $R_{U(V)}$ šikmej reflexie cez U v smere V ? Pozri priložený obrázok.

2. Nech A je $m \times n$ matica. Ukážte, že platí

$$\mathcal{R}(A^*) = \mathcal{R}(A^*A) = \mathcal{R}(A^*AA^*).$$

3. a) Ukážte, že pre maticovú 2-normu (indukovanú euklidovskou vektorovou normou) a reálnu štvorcovú maticu A platí $\|A^2\|_2 \leq \|A^T A\|_2$.

b) Predpokladajme, že P je projekčná $n \times n$ matica, t.j. $P^2 = P$. Navyše predpokladajme, že platí $\|Px\|_2 \leq \|x\|_2$ pre všetky $x \in \mathbb{R}^n$. Ukážte, že potom $\|P\|_2 = 1$ alebo 0 .

Návod : V DÚ č. 7 sme ukázali $\|A^*A\|_2 = \|A\|_2^2$.

4. a) Ukážte, že pre ľubovoľné matice $A_{n \times k}$ a $B_{k \times n}$ bloková matica

$$L = \begin{pmatrix} I - BA & B \\ 2A - ABA & AB - I \end{pmatrix}$$

spĺňa $L^2 = I$.

b) Nájdite podpriestory $V_1 = \{x \in \mathbb{R}^{k+n} \mid Lx = x\}$ a $V_{-1} = \{x \in \mathbb{R}^{k+n} \mid Lx = -x\}$, t.j. vlastné podpriestory pre vlastné hodnoty 1 a -1 matice L .

Návod : Pracujte s x v tvare $x = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.