Maticový počet – Prerekvizity II.

Prehľad definícií, tvrdení a dôležitých faktov z LAG I. a II. v 1. ročníku.

Priebežne si prezrite nasledujúce "rámčeky" – prebrané z kapitoly 4. knihy C. D. Meyera, *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra.* Neoznačené by mali byť známe z LAG I, II. Tie, ktoré sú označené jednou hviezdičkou *, asi v prvom ročníku neboli a pravdepodobne sa k nim nedostaneme podrobne ani na prednáške. Tým, ktoré sú označené dvoma hviezdičkami **, sa ešte budeme venovať.

Definícia vektorového priestoru

Množina V sa nazýva *vektorovým priestorom nad poľom* $\mathcal{F}$ ak operácie sčítania vektorov a násobenia skalárom spĺňajú nasledujúce axiómy.

(A1) $x + y \in V$ pre všetky $x, y \in V$. Táto vlastnosť sa nazýva *uzavretosť vektorového sčítania.*
(A2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ pre všetky $x, y, z \in V$.
(A3) $x + y = y + x$ pre všetky $x, y \in V$.
(A4) Existuje prvok $0 \in V$ spĺňajúci $x + 0 = x$ pre každé $x \in V$.
(A5) Pre každé $x \in V$ existuje prvok $(-x) \in V$ spĺňajúci $x + (-x) = 0$.
(M1) $\alpha x \in V$ pre všetky $\alpha \in \mathcal{F}$ a $x \in V$. Toto je *uzavretosť skalárneho násobenia.*
(M2) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ pre všetky $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$ a $x \in V$.
(M3) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ pre všetky $\alpha \in \mathcal{F}$ a $x, y \in V$.
(M4) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ pre všetky $\alpha \in \mathcal{F}$ a $x, y \in V$.
(M5) $1x = x$ pre všetky $x \in V$.

Podpriestory

Nech S je neprázdna podmnožina vektorového priestoru V nad $\mathcal{F}$ (zápis $S \subseteq V$). Ak je S tiež vektorovým priestorom nad $\mathcal{F}$ s tými istými operáciami sčítania vektorov a násobenia skalármi, hovoríme, že S je *vektorový podpriestor* priestoru V. Pre určenie, či je podmnožina podpriestorom, netreba kontrolovať všetkých 10 definičných vastností, stačí overiť iba podmienky uzavretosti **(A1)** a **(M1)**. T.j. neprázdna podmnožina S vektorového priestoru V je podpriestorom V práve vtedy, keď

(A1) $x, y \in S \quad \Longrightarrow \quad x + y \in S$

a

(M1) $x \in S \quad \Longrightarrow \quad \alpha x \in S$ pre všetky $\alpha \in \mathcal{F}$.

Plochosť

Aj keď sa "plochosť" (nezakrivenosť) vo vyšších dimenziách nedá vidieť "voľným okom", môžeme ju uchopiť pomocou konceptu podpriestoru. (Vektorový) podpriestor si treba predstavovať ako plochú varietu prechádzajúcu cez počiatok.

Generujúca množina

- Pre množinu vektorov $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ sa podpriestor

  $$span\,(S) = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_r v_r\}$$

  obsahujúci všetky lineárne kombinácie vektorov v S nazýva *priestor generovaný* S, resp. *lineárny obal* S.
- Ak vektorový priestor V spĺňa $V = span\,(S)$, hovoríme, že S je *generujúca množina priestoru* V. Inými slovami, S *generuje* V práve vtedy, keď je každý vektor vo V lineárnou kombináciou vektorov z S.

Súčet podpriestorov

Ak X a Y sú podpriestory vektorového priestoru V, potom *súčet* X *a* Y je množina obsahujúca všetky možné súčty vektorov z X a vektorov z Y. Teda

$$X + Y = \{x + y \mid x \in X \text{ a } y \in Y\} .$$

- $X + Y$ je opäť podpriestorom V.
- Ak S_X a S_Y generujú X, resp. Y, potom $S_X \cup S_Y$ generuje $X + Y$.

Podpriestory a lineárne zobrazenia

Pre lineárne zobrazenie f z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ označme *obraz* f ako $\mathcal{R}(f)$. T.j. $\mathcal{R}(f) = \{f(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^m$ je množina všetkých obrazov $f(x)$, keď x prechádza cez celý priestor $\mathbb{R}^n$.

- Obraz (obor hodnôt) pre každé lineárne zobrazenie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je podpriestor $\mathbb{R}^m$ a každý podpriestor priestoru $\mathbb{R}^m$ je obrazom nejakého lineárneho zobrazenia.

Obraz zobrazenia daného maticou

Násobenie maticou $A_{m\times n}$ definuje lineárne zobrazenie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dané predpisom $f(x) = Ax$ pre $x \in \mathbb{R}^n$. Jeho obraz potom je

$$\mathcal{R}(A) = \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^m;$$

po anglicky sa zvykne nazývať *range of a matrix* A, slovenský termín nie je ustálený.
Podobne máme $\mathcal{R}(A^T)$ definovaný ako

$$\mathcal{R}(A^T) = \{A^T y \mid y \in \mathbb{R}^m\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Stĺpcový a riadkový priestor

Pre maticu $A_{m\times n}$ platí

- $\mathcal{R}(A) =$ priestor generovaný stĺpcami A (stĺpcový priestor).
- $\mathcal{R}(A^T) =$ priestor generovaný riadkami A (riadkový priestor).
- $b \in \mathcal{R}(A) \iff b = Ax$ pre nejaké x.
- $a \in \mathcal{R}(A^T) \iff a^T = y^T A$ pre nejaké y^T.

Matice s rovnakými riadkovými a stĺpcovými podpriestormi

Pre matice A a B rovnakého typu platí:

- $\mathcal{R}(A^T) = \mathcal{R}(B^T)$ práve vtedy, keď $A \overset{row}{\sim} B$.
- $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(B)$ práve vtedy, keď $A \overset{col}{\sim} B$.

Generátory riadkového a stĺpcového priestoru

Nech A je matica typu $m\times n$ a U je stupňovitá matica riadkovo ekvivalentná matici A. Nasledujúce množiny generujú riadkový a stĺpcovy priestor A:

- nenulové riadky U generujú $\mathcal{R}(A^T)$.
- "pivotové" stĺpce A generujú $\mathcal{R}(A)$.

Nulový priestor (Jadro)

- Pre $m \times n$ maticu A sa množina $\mathcal{N}(A) = \{x \mid Ax = 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$ nazýva *nulový priestor (jadro) matice* A. Inými slovami, $\mathcal{N}(A)$ je priestorom riešení homogénneho systému $Ax = 0$.
- Množina $\mathcal{N}(A^T) = \{y \mid A^T y = 0\} \subseteq \mathbb{R}^m$ sa nazýva *ľavý nulový priestor matice* A, ide o priestor riešení ľavostranného homogénneho systému $y^T A = 0$.

Generátory nulového priestoru

Na určenie generujúcej množiny pre $\mathcal{N}(A)$ pre maticu $A_{m\times n}$ s hodnosťou $h(A) = r$ je potrebné zredukovať maticu A na stupňovitý tvar U a riešiť systém $Ux = 0$ pre závislé premenné použitím voľných premenných ako parametrov. Všeobecné riešenie $Ax = 0$ má potom tvar

$$x = x_{f_1} h_1 + x_{f_2} h_2 + \cdots + x_{f_{n-r}} h_{n-r}.$$

Množina $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_{n-r}\}$ generuje $N(A)$. Navyše sa dá ukázať, že H je jednoznačná v tom zmysle, že nezávisí od konkrétnej stupňovitej matice U.

Triviálny nulový priestor

Ak A je typu $m \times n$, potom

- $\mathcal{N}(A) = \{0\}$ práve vtedy, keď $h(A) = n$;
- $\mathcal{N}(A^T) = \{0\}$ práve vtedy, keď $h(A) = m$.

* Ľavý nulový priestor

Ak pre A typu $m \times n$ a hodnosti $h(A) = r$ máme $PA = U$ ($P_{m\times m}$ je regulárna a $U_{m\times n}$ je v stupňovitom tvare), potom posledných $m - r$ riadkov P generuje ľavý nulový priestor. T.j. ak $P = \binom{P_1}{P_2}$, kde P_2 je typu $(m - r) \times m$, potom

$$\mathcal{N}(A^T) = \mathcal{R}(P_2^T).$$

Matice s rovnakými nulovými priestormi

Pre matice A a B rovnakého typu platí

- $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(B)$ práve vtedy, keď $A \overset{row}{\sim} B$.
- $\mathcal{N}(A^T) = \mathcal{N}(B^T)$ práve vtedy, keď $A \overset{col}{\sim} B$.

* Štyri základné podpriestory pre maticu – súhrn

Štyri základné podpriestory asociované s maticou A sú

- stĺpcový priestor $\mathcal{R}(A) = \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^m$.
- riadkový priestor $\mathcal{R}(A^T) = \{A^T y \mid y \in \mathbb{R}^m\} \subseteq \mathbb{R}^n$.
- nulový priestor $\mathcal{N}(A) = \{x \mid Ax = 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$.
- ľavý nulový priestor $\mathcal{N}(A^T) = \{y \mid A^T y = 0\} \subseteq \mathbb{R}^m$.

Ak P je regulárna matica, spĺňajúca $PA = U$, kde U je v stupňovitom tvare a $h(A) = r$, potom

- generujúca množina $\mathcal{R}(A)$ = "pivotové" stĺpce A.
- generujúca množina $\mathcal{R}(A^T)$ = nenulové riadky U.
- generujúca množina $\mathcal{N}(A)$ = vektory h_i zo všeobecného riešenia $Ax = 0$.
- generujúca množina $\mathcal{N}(A^T)$ = posledných $m - r$ riadkov P.

Ak A a B sú rovnakého typu

- $A \overset{row}{\sim} B \iff \mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(B) \iff \mathcal{R}(A^T) = \mathcal{R}(B^T)$.
- $A \overset{col}{\sim} B \iff \mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(B) \iff \mathcal{N}(A^T) = \mathcal{N}(B^T)$.

Lineárna nezávislosť

Množina vektorov $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ sa nazýva *lineárne nezávislá*, ak je jediným riešením homogénnej rovnice

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$$

iba triviálne riešenie $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$. Pokiaľ existuje nejaké netriviálne riešenie (t.j. aspoň jedno $\alpha_i \neq 0$), množina S sa nazýva *lineárne závislou.* Inými slovami, lineárne nezávislé množiny sú tie, ktoré neobsahujú žiadne vzťahy závislosti medzi svojimi prvkami a lineárne závislé sú tie množiny, v ktorých je aspoň jeden vektor lineárnou kombináciou ostatných. Prázdna množina sa považuje za lineárne nezávislú.

Lineárna nezávisloť a matice

Nech A je matica typu $m \times n$.

- Obe nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné tomu, že stĺpce A sú lineárne nezávislé.
  - ▷ $\mathcal{N}(A) = \{0\}$.
  - ▷ $h(A) = n$.
- Obe nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné tomu, že riadky A sú lineárne nezávislé.
  - ▷ $\mathcal{N}(A^T) = \{0\}$.
  - ▷ $h(A) = m$.
- Ak je A štvorcová matica, potom obe nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné tomu, že A je regulárna.
  - ▷ Stĺpce A tvoria lineárne nezávislú množinu.
  - ▷ Riadky A tvoria lineárne nezávislú množinu.

Najväčšie lineárne nezávislé podmnožiny

Ak $h(A_{m\times n}) = r$, potom platí:

- Každá maximálna lineárne nezávislá podmnožina stĺpcov A má práve r prvkov.
- Každá maximálna lineárne nezávislá podmnožina riadkov A má práve r prvkov.
- Špeciálne, r "pivotových" stĺpcov matice A tvorí maximálnu lineárne nezávislú podmnožinu stĺpcov matice A.

Základné fakty o lineárnej nezávislosti

Pre neprázdnu množinu vektorov $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ v priestore V platia nasledujúce tvrdenia.

- Ak S obsahuje lineárne závislú podmnožinu, potom je aj S lineárne závislá.
- Ak je S lineárne nezávislá, potom je aj každá jej podmnožina lineárne nezávislá.
- Ak je S lineárne nezávislá a $v \in V$, potom je rozšírená množina $S_{ext} = S \cup \{v\}$ lineárne nezávislá práve vtedy, keď $v \notin span(S)$.
- Ak $S \subseteq \mathbb{R}^m$ a ak $n > m$, potom je S lineárne závislá.

Báza

Lineárne nezávislá generujúca množina vo vektorovom priestore V sa nazýva *báza priestoru* V.

Charakterizácia bázy

Nech V je podpriestor $\mathbb{R}^m$ a $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\} \subseteq V$. Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné.

- $\mathcal{B}$ je bázou V.
- $\mathcal{B}$ je minimálnou generujúcou množinou priestoru V.
- $\mathcal{B}$ je maximálnou lineárne nezávislou podmnožinou vo V.

Dimenzia

Dimenzia vektorového priestoru V je definovaná ako

$$\begin{aligned}\dim V &= \text{počet vektorov v ľubovoľnej báze } V\\ &= \text{počet vektorov v ľubovoľnej minimálnej generujúcej množine priestoru } V\\ &= \text{počet vektorov v ľubovoľnej maximálnej lineárne nezávislej podmnožine } V.\end{aligned}$$

Dimenzia podpriestoru

Pre vektorové priestory M a N s $M \subseteq N$ platí:

- $\dim M \leq \dim N$.
- Ak $\dim M = \dim N$, potom $M = N$.

Základné podpriestory – dimenzie a bázy

Pre $m \times n$ reálnu maticu A hodnosti $h(A) = r$ platí:

- $\dim \mathcal{R}(A) = r$.
- $\dim \mathcal{N}(A) = n - r$.
- $\dim \mathcal{R}(A^T) = r$.
- $\dim \mathcal{N}(A^T) = m - r$.

Nech P je regulárna matica, pre ktorú je $PA = U$ v stupňovitom tvare a H je množina riešení h_i, z ktorých sa dá nakombinovať všeobecné riešenie systému $Ax = 0$. Potom

- "Pivotové" stĺpce matice A tvoria bázu $\mathcal{R}(A)$.
- Nenulové riadku U tvoria bázu $\mathcal{R}(A^T)$.
- Množina H je bázou $\mathcal{N}(A)$.
- Posledných $m - r$ riadkov matice P tvorí bázu $\mathcal{N}(A^T)$.

Pre matice s komplexnými zložkami platia predchádzajúce tvrdenia, aj keď sa A^T, U a P nahradia A^*, $\overline{U}$ a $\overline{P}$.

Veta o hodnosti a "nullity"???

- $\dim \mathcal{R}(A) + \dim \mathcal{N}(A) = n$ pre všetky $m \times n$ matice.

Dimenzia súčtu priestorov

Ak X a Y sú podpriestory vektorového priestoru V, potom

$$\dim(X + Y) = \dim X + \dim Y - \dim(X \cap Y).$$

* Hodnosť súčinu

Ak A je matica typu $m \times n$ a B je matica typu $n \times p$, potom

$$h(AB) = h(A) - \dim\left(\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{R}(B)\right).$$

* Báza prieniku podpriestorov

Ak A je matica typu $m \times n$ a B je matica typu $n \times p$, potom báza $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{R}(B)$ sa dá skonštruovať nasledovne:

- Nájsť bázu $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ podpriestoru $\mathcal{R}(B)$.
- Vytvoriť maticu $X_{n\times r} = (x_1|x_2|\ldots|x_r)$.
- Nájsť bázu $\{v_1, v_2, \ldots, v_s\}$ priestoru $\mathcal{N}(AX)$.
- $\mathcal{B} = \{Xv_1, Xv_2, \ldots, Xv_s\}$ je bázou $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{R}(B)$.

* Ohraničenia hodnosti súčinu

Ak A je matica typu $m \times n$ a B je matica typu $n \times p$, potom

- $h(AB) \leq \min\{h(A), h(B)\}$,
- $h(A) + h(B) - n \leq h(AB)$.

** Súčiny A^TA a AA^T

Pre $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ platí:

- $h(A^TA) = h(A) = h(AA^T)$.
- $\mathcal{R}(A^TA) = \mathcal{R}(A^T)$ a $\mathcal{R}(AA^T) = \mathcal{R}(A)$.
- $\mathcal{N}(A^TA) = \mathcal{N}(A)$ a $\mathcal{N}(AA^T) = \mathcal{N}(A^T)$.

Pre komplexné matice $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ sa musí operácia transpozície $(\cdot)^T$ nahradiť hermitovským združením $(\cdot)^*$.

** Normálne rovnice

- Systému $Ax = b$ typu $m \times n$ zodpovedá $n \times n$ systém *normálnych rovníc* $A^TAx = A^Tb$.
- Systém $A^TAx = A^Tb$ je vždy konzistentný, a to aj v prípade, ak $Ax = b$ nie je.
- Ak je systém $Ax = b$ konzistentný, množina jeho riešení sa zhoduje s množinou riešení systému $A^TAx = A^Tb$. Vo všeobecnosti, keď je $Ax = b$ nekonzistentný, riešenia normálnych rovníc zodpovedajú riešeniam $Ax = b$ v najmenších štvorcoch.
- $A^TAx = A^Tb$ má jednoznažné riešenie práve vtedy, keď $h(A) = n$ a vtedy sa toto riešenie dá vyjadriť ako $x = \left(A^TA\right)^{-1}A^Tb$.
- Ak je $Ax = b$ konzistentný a má jednoznačné riešenie, tak to platí aj pre $A^TAx = A^Tb$ a jednoznačné riešenie oboch systémov je $x = \left(A^TA\right)^{-1}A^Tb$.

Hodnosť a najväčšia regulárna podmatica

Hodnosť matice $A_{m\times n}$ sa rovná veľkosti najväčšej regulárnej štvorcovej podmatice matice A. Inými slovami, ak $h(A) = r$, potom existuje aspoň jedna regulárna $r \times r$ podmatica matice A a všetky štvorcové podmatice väčšej veľkosti sú singulárne.

* Malé perturbácie neznižujú hodnosť

Ak A a E sú $m \times n$ matice, pričom E má zložky dostatočne malej veľkosti, potom

$$h(A+E) \geq h(A).$$

Zhrnutie faktov o hodnosti

Pre $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ platia nasledujúce tvrdenia:
- $h(A) =$ počtu nenulových riadkov v ľubovoľnej stupňovitej matici riadkovo ekvivalentnej A.
- $h(A) =$ počtu pivotov získaných po eliminácii A na stupňovitý tvar pomocou riadkových operácií.
- $h(A) =$ počtu "pivotových" stĺpcov matice A (ako aj počtu "pivotových" stĺpcov ľubovoľnej matice, ktorá je riadkovo ekvivalentná A).
- $h(A) =$ počtu lineárne nezávislých stĺpcov matice A – t.j. veľkosti maximálnej lineárne nezávislej podmnožiny stĺpcov A.
- $h(A) =$ počtu lineárne nezávislých riadkov matice A – t.j. veľkosti maximálnej lineárne nezávislej podmnožiny riadkov A.
- $h(A) = \dim \mathcal{R}(A)$.
- $h(A) = \dim \mathcal{R}(A^T)$.
- $h(A) = n - \dim \mathcal{N}(A)$.
- $h(A) = m - \dim \mathcal{N}(A^T)$.
- $h(A) =$ veľkosti najväčšej regulárnej štvorcovej podmatice A.

Pre $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ sa môže nahradiť transpozícia $(\cdot)^T$ hermitovským združením $(\cdot)^*$.

** Všeobecný problém najmenších štvorcov

Pre $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ a $b \in \mathbb{R}^m$ označme $\varepsilon = \varepsilon(x) = Ax - b$. Všeobecný problém najmenších štvorcov je nájsť vektor x, ktorý minimalizuje hodnotu

$$\sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i^2 = \varepsilon^T \varepsilon = (Ax-b)^T(Ax-b).$$

Ľubovoľný vektor, v ktorom sa takéto minimum nadobúda sa nazýva *riešením $Ax = b$ v najmenších štvorcoch*.

- Množina riešení v najmenších štvorcoch je rovnaká ako množina riešení systému normálnych rovníc $A^TAx = A^Tb$.
- Riešenie v najmenších švorcoch je jednoznačné práve vtedy, keď $h(A) = n$ a v tom prípade je dané ako $x = \left(A^TA\right)^{-1}A^Tb$.
- Ak je $Ax = b$ konzistentný, potom je množina riešení $Ax = b$ rovnaká ako množina riešení v najmenších štvorcoch.

Lineárne transformácie

Ak sú U a V vektorové priestory nad poľom $\mathcal{F}$.

- *lineárna transformácia* z U do V je zobrazenie T zobrazujúce U do V a spĺňajúce

  $$T(x+y) = T(x) + T(y) \qquad \text{a} \qquad T(\alpha x) = \alpha T(x)$$

  alebo, ekvivalentne,

  $$T(\alpha x + y) = \alpha T(x) + T(y) \qquad \text{pre všetky } x, y \in U \text{ a } \alpha \in \mathcal{F}.$$

- *lineárny operátor* na U je lineárna transformácia z U naspäť do U.

Súradnice vzhľadom na bázu

Nech $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ je báza vektorového priestoru U a $v \in U$. Koeficienty α_i vo výraze $v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n$ sa nazývajú *súradnice v vzhľadom na bázu $\mathcal{B}$*. Značíme

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Pozor! Na poradí záleží. Ak $\mathcal{B}'$ je permutácia $\mathcal{B}$, potom zložky $[v]_{\mathcal{B}'}$ zodpovedajú príslušne spermutovaným zložkám $[v]_{\mathcal{B}}$.

Priestor lineárnych transformácií

- Pre dvojicu vektorových priestorov U a V nad $\mathcal{F}$ je množina $\mathcal{L}(U, V)$ všetkých lineárnych transformácií z U do V vektorovým priestorom nad $\mathcal{F}$.
- Nech $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ a $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ sú bázy U, resp. V a B_{ji} je lineárna transformácia z U do V definovaná ako $B_{ji}(u) = \xi_j v_i$ pre $[u]_{\mathcal{B}} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T$. T.j. treba zobrať j-tu súradnicu u a prenásobiť ňou v_i. Potom
  - ▷ $\mathcal{B}_{\mathcal{L}} = \{B_{ji}\}_{j=1,\dots,n}^{i=1,\dots,m}$ je báza $\mathcal{L}(U, V)$.
  - ▷ $\dim \mathcal{L}(UV) = (\dim U)(\dim V)$.

Vyjadrenie lineárneho zobrazenia pomocou matice

Nech $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ a $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ sú bázy U, resp. V. *Matica zobrazenia T* vzhľadom na dvojicu báz $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ je $m \times n$ matica

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \Big([T(u_1)]_{\mathcal{B}'} \Big| [T(u_2)]_{\mathcal{B}'} \Big| \dots \Big| [T(u_n)]_{\mathcal{B}'} \Big).$$

Inými slovami, ak $T(u_j) = \alpha_{1j} v_1 + \alpha_{2j} v_2 + \cdots + \alpha_{mj} v_m$, potom

$$[T(u_j)]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ \vdots \\ \alpha_{mj} \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}.$$

Ak T je lineárny operátor na U, potom sa používa iba jedna báza. Príslušnú (nutne štvorcovú) maticu zobrazenia T vzhľadom na bázu $\mathcal{B}$ teda značíme ako $[T]_{\mathcal{B}}$ (namiesto $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$).

Lineárne zobrazenie ako násobenie maticou

Nech $T \in \mathcal{L}(U, V)$ a nech $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ sú bázy U, resp. V. Pre každé $u \in U$ sa dá vyjadriť účinok T na u pomocou maticového násobenia príslušných súradníc

$$[T(u)]_{\mathcal{B}'} = [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[u]_{\mathcal{B}}.$$

Lineárne transformácie a maticová algebra

- Ak $T, L \in \mathcal{L}(U, V)$ a $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ sú bázy U, resp. V, potom
  - ▷ $[\alpha T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \alpha [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ pre skaláry α,
  - ▷ $[T + L]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} + [L]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$.
- Ak $T \in \mathcal{L}(U, V)$, $L \in \mathcal{L}(V, W)$ a $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}''$ sú bázy U,V, resp. W, potom $LT \in \mathcal{L}(U, W)$ a
  - ▷ $[LT]_{\mathcal{B}\mathcal{B}''} = [L]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''}[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$.
- Ak je operátor $T \in \mathcal{L}(U, U)$ invertibilný v zmysle $TT^{-1} = T^{-1}T = I$ pre nejaký $T^{-1} \in \mathcal{L}(U, U)$, potom pre každú bázu $\mathcal{B}$ priestoru U platí
  - ▷ $[T^{-1}]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}^{-1}$.

Zmena súradníc

Nech $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ a $\mathcal{B}' = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ sú dve bázy priestoru V. Nech T je operátor zmeny bázy – t.j. $T(y_i) = x_i$ pre všetky i a P je matica prechodu – t.j.

$$P = [T]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}'} = [I]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \Big([x_1]_{\mathcal{B}'} \Big| [x_2]_{\mathcal{B}'} \Big| \dots \Big| [x_n]_{\mathcal{B}'} \Big).$$

- $[v]_{\mathcal{B}'} = P[v]_{\mathcal{B}}$ pre všetky $v \in V$.
- P je regulárna.
- P je určená jednoznačne.

Zmena súradníc a matica lineárnej transformácie

Nech A je lineárny operátor na V a $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ sú dve bázy priestoru V. Pre matice zobrazenia $[A]_{\mathcal{B}}$ a $[A]_{\mathcal{B}'}$ vzhľadom na $\mathcal{B}$, resp. $\mathcal{B}'$ platí

$$[A]_{\mathcal{B}} = P^{-1}[A]_{\mathcal{B}'}P, \qquad \text{kde} \qquad P = [I]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$$

je matica prechodu od bázy $\mathcal{B}$ k báze $\mathcal{B}'$. Ekvivalentne,

$$[A]_{\mathcal{B}'} = Q^{-1}[A]_{\mathcal{B}}Q, \qquad \text{kde} \qquad Q = [I]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = P^{-1}$$

je matica prechodu od bázy $\mathcal{B}'$ k báze $\mathcal{B}$.

Podobnosť

- Matice $B_{n\times n}$ a $C_{n\times n}$ sú *podobné*, ak existuje regulárna matica Q a platí $B = Q^{-1}CQ$. Podobnosť matíc B a C značíme $B \simeq C$.
- Lineárny operátor $f : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ daný predpisom $f(C) = Q^{-1}CQ$ sa nazýva *podobnostná transformácia.*

Invariantné podpriestory

- Podpriestor $X \subseteq V$ sa pre lineárny operátor T na V nazýva *invariantným podpriestorom zobrazenia* T ak platí $T(X) \subseteq X$.
- V takom prípade sa na T možno pozerať ako na lineárny operátor na X zabudnúc na zvyšok priestoru V a zúžiac T iba na vektory v X. Takýto *zúžený operátor* sa značí $T_{|X}$.

Invariantné podpriestory a matica zobrazenia

Nech T je lineárny operátor na n-rozmernom priestore V a X, Y, $\dots$, Z sú podpriestory V s dimenziami r_1, r_2, $\dots$, r_k a bázami $\mathcal{B}_X, \mathcal{B}_Y, \dots, \mathcal{B}_Z$. Predpokladajme, že $\sum_i r_i = n$ a $\mathcal{B} = \mathcal{B}_X \cup \mathcal{B}_Y \cup \dots \cup \mathcal{B}_Z$ je báza V.

- Podpriestor X je invariantný vzhľadom na T práve vtedy, keď $[T]_{\mathcal{B}}$ má blokovo-trojuholníkový tvar
$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A_{r_1 \times r_1} & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \quad \text{a v tom prípade} \quad A = \left[T_{|X}\right]_{\mathcal{B}_X}.$$
- Podpriestory X, Y, $\dots$, Z sú všetky invariantné vzhľadom na T práve vtedy, keď $[T]_{\mathcal{B}}$ má blokovo-diagonálny tvar
$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A_{r_1 \times r_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_{r_2 \times r_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_{r_k \times r_k} \end{pmatrix},$$
pričom
$$A = \left[T_{|X}\right]_{\mathcal{B}_X}, \quad B = \left[T_{|Y}\right]_{\mathcal{B}_Y}, \quad \dots, \quad C = \left[T_{|Z}\right]_{\mathcal{B}_Z}.$$

Trojuholníkové a diagonálne blokové tvary

Pre $n \times n$ maticu T platí:

- Q je regulárna matica spĺňajúca
$$Q^{-1}TQ = \begin{pmatrix} A_{r \times r} & B_{r \times q} \\ 0 & C_{q \times q} \end{pmatrix}$$
práve vtedy, keď prvých r stĺpcov Q generuje invariantný podpriestor vzhľadom na T.
- Q je regulárna matica spĺňajúca
$$Q^{-1}TQ = \begin{pmatrix} A_{r_1 \times r_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_{r_2 \times r_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_{r_k \times r_k} \end{pmatrix},$$
práve vtedy, keď $Q = (Q_1|Q_2|\dots|Q_k)$, kde Q_i sú typu $n \times r_i$ a stĺpce každej z Q_i generujú invariantný podpriestor vzhľadom na T.