Podvádzanie pri skúške je vážnym porušením Študijného poriadku FMFI UK, ktoré môže viesť k vylúčeniu zo štúdia. Nerobte hlúposti. Počas písomky je zakázané používať komunikačné nástroje a informačné zdroje. Veľa zdaru!

Skúška z Maticového počtu I., 10. január 2022

1. Majme maticu $A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -4 & -2 \\ 2 & -2 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$.
Nájdite jej pseudoinverznú maticu $A^\dagger$. (Napr. pomocou niektorého z jej URV rozkladov.)

2. Nájdite (alebo ukážte, že neexistuje) 3×3 maticu A, ktorá spĺňa nasledovné: jej prvý stĺpec je $a_1 = \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{smallmatrix}\right]$ a prvý riadok matice A^{-1} je $b_1 = [2, 5, -3]$.

3. a) Pre $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ nájdite jej Householderovu redukciu $PA = T$. (Treba použiť elementárne reflexie $R = I - 2\frac{uu^*}{u^*u}$ pre vhodné u.)
b) Pomocou časti a) riešte problém najmenších štvorcov $\min_x \|Ax - b\|_2$ pre $b = (3, -1, 1)^T$. (Využite fakt, že systémy $(A\,|\,b)$ a $(T\,|\,\tilde{b}) = P^*(A\,|\,b)$ sú ekvivalentné.)

4. a) Nech A je matica typu $m \times n$ a B je typu $n \times m$. Ukážte, že potom platí

$$\det(I_m + AB) = \det(I_n + BA).$$

Návod : Aký je determinant blokovej matice $\left[\begin{smallmatrix} I_m & -A \\ B & I_n \end{smallmatrix}\right]$?
b) Ukážte, že pre charakteristické polynómy matíc AB a BA platí $\lambda^n \chi_{AB}(\lambda) = \lambda^m \chi_{BA}(\lambda)$.

5. Nech $N_{n\times n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.
a) Ukážte, že $\lambda \in \sigma(N + N^T)$ práve vtedy, keď $i\lambda \in \sigma(N - N^T)$.
b) Vysvetlite prečo $N + N^T$ je regulárna práve vtedy, keď je n párne.
c) Nájdite hodnotu podielu $\det(N - N^T)/\det(N + N^T)$ pre párne n.

6. Ukážte, že pre kladnú maticu $A_{n\times n} > 0$ sa dá jej spektrálny polomer ohraničiť:

$$\min_i \sum_{j=1}^n a_{ij} \le \rho(A) \le \max_i \sum_{j=1}^n a_{ij}.$$

(*Návod:*) Čo predstavuje horné ohraničenie? Ako pomôže vektor $(1, 1, \ldots, 1)$ pri dolnom ohraničení?