Maticový počet – Úloha č. 3

Cvičenia v týždni 9. októbra 2023

Úlohy (strany a číslovanie) sú z knihy Carla D. Meyera *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra.*

1. (3.10.1) Nech $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 18 & 26 \\ 3 & 16 & 30 \end{pmatrix}$.
(a) Nájdite LU faktory matice A.
(b) Použite LU faktory pri riešení $Ax_1 = b_1$ a $Ax_2 = b_2$ pre

$$b_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

(c) Použite LU faktory pre určenie A^{-1}. (Pozri knihu.)

2. (3.10.3) Určite všetky hodnoty parametra ξ, pre ktoré nebude pre maticu $A = \begin{pmatrix} \xi & 2 & 0 \\ 1 & \xi & 1 \\ 0 & 1 & \xi \end{pmatrix}$ existovať LU rozklad.

3. (3.10.4) Ak je A regulárna matica, ktorá má LU rozklad, ukážte, že jej $(k+1)$-vý pivot pri štandardnej Gaussovej eliminácii používajúcej iba operácie typu III bude spĺňať:

$$p_{k+1} = a_{k+1,k+1} - c^T A_k^{-1} b,$$

kde A_k a

$$A_{k+1} = \begin{pmatrix} A_k & b \\ c^T & a_{k+1,k+1} \end{pmatrix}$$

sú hlavné ľavé horné podmatice veľkosti k, resp. $k+1$. Použite tento výpočet na dôkaz nenulovosti pivotov matice A, za predpokladu existencie jej LU rozkladu. (Bude asi vhodné ukázať, že $p_{k+1} = u_{k+1,k+1}$, kde $u_{k+1,k+1}$ je nenulový diagonálny prvok matice U)

4. (3.10.5) Zdôvodnite prečo pre maticu A, ktorej zložky sú celočíselné a všetky jej pivoty sú rovné 1, je aj A^{-1} celočíselná matica.
Pozn.: Tento fakt sa dá využiť na konštrukciu náhodných celočíselných matíc s celočíselnými inverzami. Najprv sa náhodne vygenerujú celočíselné matice L a U s jednotkovými diagonálami a následne sa vynásobia na $A = LU$.

5. (3.10.6) Uvažujme tridiagonálnu maticu $T = \begin{pmatrix} \beta_1 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \beta_2 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \beta_3 & \gamma_3 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & \beta_4 \end{pmatrix}$.
(a) Za predpokladu, že A má LU rozklad, overte, že spĺňa:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1/\pi_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2/\pi_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3/\pi_3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} \pi_1 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \pi_2 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \pi_3 & \gamma_3 \\ 0 & 0 & 0 & \pi_4 \end{pmatrix},$$

kde π_i sú generované rekurentným predpisom

$$\pi_1 = \beta_1 \qquad \text{a} \qquad \pi_{i+1} = \beta_{i+1} - \frac{\alpha_i \gamma_i}{\pi_i}.$$

Pozn. Keďže takýto vzťah platí pre tridiagonálne matice ľubovoľnej veľkosti, ich LU rozklad sa dá spočítať veľmi ľahko.

(b) Použite predošlý rekurentný vzorec na nájdenie LU rozkladu $n \times n$ matice

$$T_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(Pozri Príklad 1.4.1 na str. 19)

6. (3.10.7) Matica $A_{n\times n}$ sa nazýva *pásovou maticou* (band matrix) ak $a_{ij} = 0$ pre $|i-j| > w$ pre nejaké nezáporné celé číslo w, ktoré sa nazýva *šírka pásu* (bandwidth). Inými slovami, nenulové zložky A sa nachádzajú na páse vedľajších diagonál šírky w nad a pod hlavnou diagonálou. Napríklad, tridiagonálne matice sú pásové matice so šírkou pásu 1, diagonálne matice sú pásove matice so šírkou pásu 0.

Overte, že ak je A regulárna pásová matica so šírkou pašu w a A má LU rozklad, potom L zdedí dolnú pásovú štruktúru A a U zdedí hornú pásovú štruktúru A – t.j. matica L má "dolnú pásovú šírku" w a matica U má "hornú pásovú šírku" w.

7. (3.10.9) (a) Nájdite LDU faktory pre maticu $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 18 & 26 \\ 3 & 16 & 30 \end{pmatrix}$ (rovnaká ako v úlohe č. 1).

(b) Ukážte, že ak má matica LDU rozklad, tak je jednoznačný.

(c) Vysvetlite prečo pre symetrickú maticu A s LDU rozkladom tento musí mať tvar $A = LDL^T$.