Maticový počet – Úloha č. 4

Cvičenia v týždni 16. októbra 2023

Úlohy (strany a číslovanie) sú z knihy Carla D. Meyera *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra.*

1. (4.5.13) Vykonajte nasledujúce výpočty s maticami:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2,01 \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1,01 \end{pmatrix}.$$

(a) Nájdite $h(A)$ a riešte $Ax = b$ v presnej aritmetike.
(b) Nájdite $h(A^T A)$ a riešte $A^T Ax = A^T b$ presne.
(c) Nájdite $h(A)$ a riešte $Ax = b$ v trojčíslicovej aritmetike.
(d) Nájdite $A^T A$, $A^T b$ a riešenie $A^T Ax = A^T b$ v trojčíslicovej aritmetike.

2. (4.5.18) Ak A je štvorcová $n \times n$ matica, ukážte, že nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:
(a) $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}\left(A^2\right)$.
(b) $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}\left(A^2\right)$.
(c) $\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{N}(A) = \{0\}$.

3. (4.5.19) Nech A, B sú $n \times n$ matice spĺňajúce $A^2 = A$, $B^2 = B$ a $AB = BA = 0$.
(a) Ukážte, že $h(A + B) = h(A) + h(B)$. *Návod:* Pozrite sa na $\left(\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}\right)(A + B)(A \,|\, B)$.
(b) Ukážte, že $h(A) + h(I - A) = n$.

4. (4.5.20) *Moore–Penroseova pseudoinverzia.* Nech pre $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ s $h(A) = r$ je $A = BC$ rozklad matice A na faktory $B_{m\times r}$ a $C_{r\times n}$, pričom matica B pozostáva z "pivotových" stĺpcov matice A a C je tvorená r nenulovými riadkami redukovaného stupňovitého tvaru E_A. Matica $A^\dagger$ definovaná vzťahom

$$A^\dagger = C^T (B^T AC^T)^{-1} B^T$$

sa nazýva *Moore–Penroseovou (pseudo)inverznou* maticou k matici A.

(a) Zdôvodnite, prečo je matica $B^T AC^T$ regulárna.

(b) Overte, že $x = A^\dagger b$ je rešením systému normálnych rovníc $A^T Ax = A^T b$ (a tiež $Ax = b$, ak je tento systém konzistentný).

(c) Ukážte, že všeobecné riešenie $A^T Ax = A^T b$ (a tiež $Ax = B$, ak je konzistnentný) sa dá popísať ako

$$x = A^\dagger b + (I - A^\dagger A)h,$$

kde h je "voľná premenná" – ľubovoľný vektor v $\mathbb{R}^n$.

(d) Zdôvodnite, prečo v prípade $h(A) = n$ bude platiť $A^\dagger = \left(A^T A\right)^{-1} A^T$.

(e) Vysvetlite prečo pre A štvorcovú regulárnu platí $A^\dagger = A^{-1}$.

(f) Overte, že $A^\dagger = C^T (B^T AC^T)^{-1} B^T$ spĺňa Penroseove rovnice:

$$\begin{aligned} AA^\dagger A &= A, & (AA^\dagger)^T &= AA^\dagger \\ A^\dagger AA^\dagger &= A^\dagger, & (A^\dagger A)^T &= A^\dagger A. \end{aligned}$$

Pozn. Penrose pôvodne definoval $A^\dagger$ ako jediné riešenie týchto štyroch maticových rovníc.

5. (4.6.1) Hookov zákon hovorí, že výchylka y ideálnej pružiny lineárne závisí od sily x, ktorou sa na ňu pôsobí – t.j. $y = kx$ pre nejakú konštantu k – *tuhosť pružiny* . Majme strunu s neznámou tuhosťou, zavesme na ňu postupne rôzne závažia a zmerajme odchýlky. Výsledky sú zaznamenané v tabuľke. Použite metódu najmenších štvorcov na určenie k.

x (kg)	5	7	8	10	12
y (cm)	11,1	15,4	17,5	22,0	26,3

6. (4.6.6) Pri štúdiu rakoviny výskumník došiel k hypotéze, že z krátkodobého hľadiska počet zhubných nádorových buniek y rastie exponenciálne vzhľadom na čas t. T.j. $y = \alpha_0 e^{\alpha_1 t}$. Určite parametre α_0 a α_1 metódou najmenších štvorcov z nasledujúcich dát:

t (dni)	1	2	3	4	5
y (bunky)	16	27	45	74	122

Návod: Aká bežná transformácia mení exponenciálnu funkciu na lineárnu?

7. (4.6.7) Použitím metódy najmenších štvorcov nájdite pre nasledujúce dáta najlepšiu lineárnu aproximáciu – priamku $y = \alpha_0 + \alpha_1 x$ a najlepšiu kvadratickú aproximáciu – parabolu $y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$. Rozhodnite, ktorá z týchto dvoch kriviek lepšie pasuje k dátam porovnaním súčtu štvorcov chýb.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	2	7	9	12	13	14	14	13	10	8	4

8. (4.6.9) Pre $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ a $b \in \mathbb{R}^m$ ukážte, že x_2 je riešením systému $Ax = b$ v najmenších štvorcoch práve vtedy, keď x_2 je časťou riešenia väčšieho systému

$$\begin{pmatrix} I_{m \times m} & A \\ A^T & 0_{n \times n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pozn. Nezriedka sa stáva, že pri probléme najmenších štvorcov je matica A extrémne veľká, ale pomerne riedka. Pre takéto matice obsahuje predchádzajúci systém spravidla výrazne menej nenulových zložiek ako systém normálnych rovníc, čo pomáha prekonať problémy s pamäťou, ktorými veľké systémy normálnych rovníc zvyknú trpieť. Tiež si treba všimnúť, že tento systém sa vyhýba explicitnému výpočtu $A^T A$, čím sa vyhneme nárastu zlej podmienenosti/zaokrúhľovacej chyby.