

Úlohy (strany a číslovanie) sú z knihy Carla D. Meyera *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*.

1. (4.6.10) V aplikáciách metódy najmenších štvorcov sa často stane, že matica dát  $A_{m \times n}$  nemá lineárne nezávislé stĺpce, t.j.  $h(A) < n$ , a následne príslušný systém normálnych rovníc  $A^T A x = A^T b$  nemá jednoznačné riešenie. To potom znamená, že aj nejaká odhadovaná veličina  $y$ , ktorá je lineárnou funkciou hľadaných parametrov  $x = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T$ , napr.

$$y = \alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2 + \dots + \alpha_n t_n + \varepsilon,$$

môže nadobúdať pre nekonečne veľa riešení  $x$  nekonečne veľa rôznych hodnôt, čo je nežiaduce.

V takom prípade má zmysel obmedziť sa iba na tie  $n$ -tice  $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ , ktoré ležia v riadkovom priestore matice  $A$ .

Ukážte, že ak

$$t = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} \in \mathcal{R}(A^T) \quad \text{a} \quad x = \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_1 \\ \hat{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_n \end{pmatrix}$$

je ľubovoľné riešenie  $Ax = b$  v najmenších štvorcach (t.j.  $A^T A x = A^T b$ ), potom je odhad

$$\hat{y} = t^T x = \sum_{i=1}^n t_i \hat{\alpha}_i$$

jednoznačný v tom, že nezávisí od voľby konkrétneho riešenia  $x$  v najmenších štvorcach.

2. (5.9.7) Predpokladajme, že  $\mathcal{V} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$  a  $P$  je projektor na  $\mathcal{X}$  v smere  $\mathcal{Y}$ . Ukážte, že platí

$$\mathcal{R}(P) = \mathcal{N}(I - P) = \mathcal{X} \quad \text{a} \quad \mathcal{R}(I - P) = \mathcal{N}(P) = \mathcal{Y}.$$

3. (5.9.12) Nech  $P$  a  $Q$  sú projekčné operátory.

(a) Ukážte, že  $\mathcal{R}(P) = \mathcal{R}(Q)$  práve vtedy, keď  $PQ = Q$  a  $QP = P$ .

(b) Ukážte, že  $\mathcal{N}(P) = \mathcal{N}(Q)$  práve vtedy, keď  $PQ = P$  a  $QP = Q$ .

(c) Ukážte, že ak  $E_1, E_2, \dots, E_k$  sú projektory s rovnakým obrazom a  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  sú skaláry spĺňajúce  $\sum_j \alpha_j = 1$ , potom je aj  $\sum_j \alpha_j E_j$  projektor.

4. (5.9.17) Majme reálny alebo komplexný vektorový priestor,  $E$  je projektor na  $\mathcal{X}_1$  v smere  $\mathcal{Y}_1$  a  $F$  je projektor na  $\mathcal{X}_2$  v smere  $\mathcal{Y}_2$ . Ukážte, že  $E + F$  je projektor práve vtedy, keď  $EF = FE = 0$ , a v tom prípade  $\mathcal{R}(E + F) = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$  a  $\mathcal{N}(E + F) = \mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{Y}_2$ .

5. (5.9.18) Majme reálny alebo komplexný vektorový priestor,  $E$  je projektor na  $\mathcal{X}_1$  v smere  $\mathcal{Y}_1$  a  $F$  je projektor na  $\mathcal{X}_2$  v smere  $\mathcal{Y}_2$ . Ukážte, že  $E - F$  je projektor práve vtedy, keď  $EF = FE = F$ , a v tom prípade  $\mathcal{R}(E - F) = \mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2$  a  $\mathcal{N}(E - F) = \mathcal{Y}_1 \oplus \mathcal{X}_2$ .

Návod:  $P$  je projektor práve vtedy, keď je  $(I - P)$  projektor.

6. (5.9.19) Majme reálny alebo komplexný vektorový priestor,  $E$  je projektor na  $\mathcal{X}_1$  v smere  $\mathcal{Y}_1$  a  $F$  je projektor na  $\mathcal{X}_2$  v smere  $\mathcal{Y}_2$ . Ukážte, že ak  $EF = P = FE$ , potom  $P$  je projektor na  $\mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2$  v smere  $\mathcal{Y}_1 + \mathcal{Y}_2$ .

7. (5.9.20) Vnútorňý pseudoinverz pre  $A_{m \times n}$  je matica  $X_{n \times m}$  spĺňajúca  $AXA = A$ , a vonkajší pseudoinverz pre  $A$  je matica  $X$  spĺňajúca  $XAX = X$ . Ak je  $X$  zároveň vonkajší aj vnútorňý pseudoinverz, nazýva sa reflexívny pseudoinverz.

(a) Ak  $Ax = b$  je konzistentný systém  $m$  rovníc o  $n$  neznámych a  $A^-$  je ľubovoľný vnútorňý pseudoinverz matice  $A$ , zdôvodnite prečo sa dá množina všetkých riešení  $Ax = b$  vyjadriť ako

$$A^-b + \mathcal{R}(I - A^-A) = \{A^-b + (I - A^-A)h \mid h \in \mathbb{R}^n\}.$$

(b) Nech  $\mathcal{M}$  a  $\mathcal{L}$  sú nejaké komplementárne priestory k  $\mathcal{R}(A)$  a  $\mathcal{N}(A)$ , t.j.  $\mathbb{C}^m = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{M}$  a  $\mathbb{C}^n = \mathcal{L} \oplus \mathcal{N}(A)$ . Ukážte, že existuje jediný reflexívny pseudoinverz  $X$  matice  $A$  spĺňajúci  $\mathcal{R}(X) = \mathcal{L}$  a  $\mathcal{N}(X) = \mathcal{M}$ . Ukážte, že  $X = QA^-P$ , kde  $A^-$  je ľubovoľný vnútorný pseudoinverz pre  $A$ ,  $P$  je projektor na  $\mathcal{R}(A)$  v smere  $\mathcal{M}$  a  $Q$  je projektor na  $\mathcal{L}$  v smere  $\mathcal{N}(A)$ .

8. (5.13.3) Ukážte, že pre ortogonálny projektor  $P$  platí  $\|Px\| = \|x\|$  práve vtedy, keď  $x \in \mathcal{R}(P)$ .

9. (5.13.4) Vysvetlite prečo  $A^T P_{\mathcal{R}(A)} = A^T$  pre  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ .

10. (5.13.5) Vysvetlite prečo  $P_{\mathcal{M}} = \sum_{i=1}^r u_i u_i^T$ , ak  $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_r\}$  je nejaká ortonormálna báza podpriestoru  $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ .

11.(5.13.13) Nech  $\mathcal{M}$  a  $\mathcal{N}$  sú podpriestory priestoru  $\mathcal{V}$  a  $P_{\mathcal{M}}, P_{\mathcal{N}}$  sú príslušné ortogonálne projekčné operátory.

(a) Ukážte, že  $P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{N}} = 0$  práve vtedy, keď  $\mathcal{M} \perp \mathcal{N}$ .

(b) Je pravdou, že  $P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{N}} = 0$  práve vtedy, keď  $P_{\mathcal{N}}P_{\mathcal{M}} = 0$ ? Vysvetlite.