Maticový počet – Úloha č. 12

Cvičenia v týždni 11. decembra 2023 a na precvičenie látky z poslednej prednášky, resp. pred skúškou

---

Úlohy (strany a číslovanie) sú z knihy Carla D. Meyera *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra.*

1. (7.5.5) Ak chceme rozhodnúť, čo by mohlo platiť pre (normálne) matice, pomáha uvažovať v nasledujúcich prirovnaniach

Hermitovské matice	$\longleftrightarrow$	Reálne čísla ($z = \bar{z}$).
Anti-hermitovské matice	$\longleftrightarrow$	Rýdzo imaginárne čísla ($z = -\bar{z}$).
Unitárne matice	$\longleftrightarrow$	Body na jednotkovej kružnici ($z = e^{i\theta}$).

Napríklad, komplexná funkcia $f(z) = (1-z)(1+z)^{-1}$ (*lineárna lomená transformácia*) zobrazuje imaginárnu os v komplexnej rovine na body ležiace na jednotkovej kružnici, lebo $|f(z)|^2 = 1$ pre $\bar{z} = -z$. Preto je opodstatnené vysloviť hypotézu (ako to spravil v r. 1846 A. Cayley), že pre antihermitovskú (alebo reálnu anti-symetrickú) maticu A bude matica

$$f(A) = (I-A)(I+A)^{-1} = (I+A)^{-1}(I-A)$$

unitárna (resp. ortogonálna). Dokážte, že to je naozaj pravda. Takáto maticová funkcia sa nazýva *Cayleyho transformácia.*

2. (7.5.13) a) Vysvetlite prečo je každá unitárna matica unitárne podobná diagonálnej matici v tvare

$$D = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{i\theta_n} \end{pmatrix}.$$

b) Dokážte, že každá reálna ortogonálna matica je ortogonálne podobná reálnej blokovo diagonálnej matici v tvare

$$B = \begin{pmatrix} \pm 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & \pm 1 & & & & & \\ & & & \cos\theta_1 & \sin\theta_1 & & & \\ & & & -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & \cos\theta_t & \sin\theta_t \\ & & & & & & -\sin\theta_t & \cos\theta_t \end{pmatrix}.$$

3. (8.2.4) Nájdite Perronov koreň a Perronov vektor pre

$$A = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \beta \\ \alpha & 1-\beta \end{pmatrix},$$

kde $\alpha + \beta = 1$ a $\alpha, \beta > 0$.

4. (8.2.6) Dokážte, že ak sa súčet zložiek v každom riadku (alebo stĺpci) matice $A_{n\times n} > 0$ rovná ρ, potom $\rho(A) = \rho$.

5. (8.2.7) Dokážte, že ak $A_{n\times n} > 0$, potom

$$\min_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \le \rho(A) \le \max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.$$

Návod: Pozri príklad 7.10.2 na str. 619.

6. (8.2.8) Na ilustráciu toho, že predpoklad kladnosti v Perronovej vete nemožno zoslabiť zostrojte príklady štvorcových matíc A, pre ktoré $A \ge 0$ ale $A \not> 0$ (t.j. A má aspoň jednu nulovú zložku), s

$r = \rho(A) \in \sigma(A)$, pričom platia nasledujúce tvrdenia. Pre rôzne tvrdenia bude pravdepodobne treba nájsť rôzne príklady.

a) r môže byť 0.

b) $alg\ mult_A(r)$ môže byť väčšia ako 1.

c) $index(r)$ môže byť väčší ako 1 (rozmer najväčšieho bloku v Jordanovom tvare pre $r \in \sigma(A)$).

d) $\mathcal{N}(A - rI)$ nemusí obsahovať kladný vlastný vektor.

e) r nemusí byť jediná vlastná hodnota na spektrálnej kružnici.

7. (8.3.9) Wielandt skonštruoval maticu $W_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$, pre ktorú $W_n^{n^2-2n+2} > 0$, ale $\left[W_n^{n^2-2n+1}\right]_{11} = 0$. Overte pre $n = 4$ a prípadne skúste dokázať pre všeobecné n.

8. (8.4.4) Ukážte, že ľavý Perronov vektor pre ireducibilnú stochastickú maticu $P_{n\times n}$ $(n > 1)$ je daný ako

$$\pi^T = \frac{1}{\sum_{i=1}^n P_i}(P_1, P_2, \dots, P_n),$$

kde P_i je i-ty hlavný minor (determinant $(n-1)\times(n-1)$ podmatice) pre $I - P$.

Návod: Čomu sa rovná $\mathrm{adj}(A)A$ pre singulárnu maticu A?