Podvádzanie pri písomke je vážnym porušením Študijného poriadku FMFI UK, ktoré môže viesť k vylúčeniu zo štúdia. Nerobte hlúposti. Počas písomky je zakázané používať komunikačné nástroje a informačné zdroje. Veľa zdaru!

Písomka z Maticového počtu, 7. december 2022

1. Uvažujme regulárnu blokovú maticu $M = \begin{pmatrix} A_{r\times r} & C_{r\times s} \\ R_{s\times r} & B_{s\times s} \end{pmatrix}$ s regulárnym ľavým horným blokom A. Označme $U = \begin{pmatrix} 0_{r\times s} \\ I_{s\times s} \end{pmatrix}$ a $V = U^T = \begin{pmatrix} 0_{s\times r} & I_{s\times s} \end{pmatrix}$. Ukážte, že potom platí

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = M^{-1} - M^{-1}U(VM^{-1}U)^{-1}VM^{-1}.$$

Návod: Využite fakt, že pravý dolný $s \times s$ blok matice M^{-1} je S^{-1}, kde S je Schurov doplnok k A v M, t.j. $s \times s$ matica $S = B - RA^{-1}C$.

2. Nech A je $m \times n$ matica a B je $n \times m$ matica. Predpokladajme, že $h(AB) = h((AB)^2)$. Ukážte, že potom platí $h(AB) \leq h(BA)$.

3. Predpokladajme, že P je nenulová projekčná $n \times n$ matica.

a) Ukážte, že ak je P matica ortogonálnej projekcie, tak jej maticová 2-norma je$\|P\|_2 = 1$.

b) Ukážte aj opačnú implikáciu: ak pre projekčnú maticu P platí $\|P\|_2 = 1$, potom ide o maticu kolmej projekcie.

4. Nech $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ a $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Nájdite obdĺžnikový QR rozklad matice A.

b) Pomocou rozkladu na faktory Q a R z časti a) nájdite riešenie systému $Ax = b$ v najmenších štvorcoch.