Maticový počet – Prehľad III.

Prehľad definícií, tvrdení a dôležitých faktov z LAG I. a II. v 1. ročníku.

Priebežne si prezrite nasledujúce "rámčeky" – prebrané z kapitol 5. a 6. knihy C. D. Meyera, *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra.* Neoznačené by mali byť známe z LAG I, II. Tie, ktoré sú označené jednou hviezdičkou *, asi v prvom ročníku neboli a pravdepodobne sa k nim nedostaneme podrobne ani na prednáške. Tým, ktoré sú označené dvoma hviezdičkami **, sa ešte budeme venovať.

Euklidovská norma

Pre vektor $x_{n\times 1}$ sa jeho *euklidovská norma* definuje ako

- $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2} = \sqrt{x^T x}$ pre $x \in \mathbb{R}^n$,
- $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2} = \sqrt{x^* x}$ pre $x \in \mathbb{C}^n$.

Štandardný skalárny súčin

Skalárne výrazy definované vzťahmi

$$x^T y = \sum_{i=1}^n x_i y_i \in \mathbb{R} \qquad \text{a} \qquad x^* y = \sum_{i=1}^n \overline{x}_i y_i \in \mathbb{C}$$

sa naývajú *štandardný skalárny súčin vektorov x a y* v $\mathbb{R}^n$, resp. v $\mathbb{C}^n$.

Cauchy–Schwarzova nerovnosť

$$|x^* y| \le \|x\|\,\|y\| \qquad \text{pre všetky } x, y \in \mathbb{C}^n.$$

Rovnosť nastáva práve vtedy, keď $y = \alpha x$ pre $\alpha = x^* y / x^* x$.

Trojuholníková nerovnosť

$$\|x + y\| \le \|x\| + \|y\| \qquad \text{pre všetky } x, y \in \mathbb{C}^n.$$

**** p-normy**

Pre $p \ge 1$ je *p-norma* vektora $x \in \mathbb{C}^n$ definovaná ako $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$.

**** Všeobecné normy na vektorových priestoroch**

Norma na reálnom alebo komplexnom vektorovom priestore V je funkcia $\|\cdot\|$ zobrazujúca V do $\mathbb{R}$ spĺňajúca:

$$\begin{aligned} &\|x\| \ge 0 \qquad \text{a} \qquad \|x\| = 0 \iff x = 0, \\ &\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \qquad \text{pre všetky skaláry } \alpha, \\ &\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|. \end{aligned}$$

** Frobeniova norma pre matice

Frobeniova maticová norma je pre $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ definovaná vzťahmi

$$\|A\|_F^2 = \sum_{i,j} |a_{ij}|^2 = \sum_i \|A_{i*}\|^2 = \sum_j \|A_{*j}\|^2 = \mathrm{Tr}(A^*A).$$

** Všeobecné normy pre matice

Maticová norma je funkcia $\|\cdot\|$ zobrazujúca množinu všetkých komplexných matíc (všetkých konečných typov) do $\mathbb{R}$ spĺňajúca:

$$\|A\| \geq 0 \qquad \text{a} \qquad \|A\| = 0 \Longleftrightarrow A = 0.$$

$$\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\| \qquad \text{pre všetky skaláry } \alpha.$$

$$\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\| \qquad \text{pre matice rovnakého typu.}$$

$$\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\| \qquad \text{pre všetky matice kompatibilné vzhľadom na násobenie.}$$

** Indukované maticové normy

Vektorové normy definované na $\mathbb{C}^m$ a $\mathbb{C}^n$ indukujú normu na priestore matíc $M_{m\times n}(\mathbb{C})$ nasledovne:

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\| \qquad \text{pre } A \in M_{m\times n}(\mathbb{C}),\ x \in \mathbb{C}^n.$$

Vo všeobecnosti je v definícii takejto *operátorovej normy* potrebné použiť $\sup \|Ax\|$, vďaka lokálnej kompaktnosti $\mathbb{C}^n$ sa však toto suprémum niekde na jednotkovej sfére v $\mathbb{C}^n$ nadobúda.

- Indukovaná maticová norma je zjavne kompatibilná s vektorovou normou v zmysle:
$$\|Ax\| \leq \|A\|\,\|x\|.$$
- Ak je A regulárna štvorcová matica, potom $\displaystyle\min_{\|x\|=1} \|Ax\| = \frac{1}{\|A^{-1}\|}$.

** Maticová 2-norma

- Pre maticovú normu indukovanú euklidovskou vektorovou normou platí
$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}},$$
kde $\lambda_{\max}$ je najväčšie (reálne) číslo λ také, že $A^*A - \lambda I$ je singulárna.
- Ak je A regulárna (štvorcová), potom
$$\left\|A^{-1}\right\|_2 = \frac{1}{\min\limits_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{\min}}},$$
kde $\lambda_{\min}$ je je najmenšie (reálne) číslo λ také, že $A^*A - \lambda I$ je singulárna.

Pozn. V reči vlastných a singulárnych hodnôt toto znamená, že $\lambda_{\max}$ a $\lambda_{\min}$ sú najväčšia a najmenšia vlastná hodnota matice A^*A a $\sigma_1 = (\lambda_{\max})^{1/2}$, $\sigma_n = (\lambda_{\min})^{1/2}$ sú najväčšia a najmenšia singulárna hodnota matice A.

**** Vlastnosti 2-normy**

Okrem vlastností indukovanej normy maticová 2-norma má aj nasledujúce vlastnosti

- $\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \max_{\|y\|_2=1} |y^* A x|$.
- $\|A\|_2 = \|A^*\|_2$.
- $\|A^* A\|_2 = \|A\|_2^2$.
- $\left\|\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)\right\|_2 = \max\{\|A\|_2, \|B\|_2\}$.
- $\|U^* A V\|_2 = \|A\|_2$ ak $UU^* = I$ a $V^* V = I$.

**** Maticová 1-norma a ∞-norma**

Maticové normy indukované vektorovou 1-normou a ∞-normou sú:

- $\|A\|_1 = \max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|$

  $=$ najväčší súčet absolútnych hodnôt po stĺpcoch.

- $\|A\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$

  $=$ najväčší súčet absolútnych hodnôt po riadkoch.

**** Všeobecný skalárny súčin**

Skalárny súčin na reálnom (alebo komplexnom) vektorovom priestore V je funkcia, ktorá priradí každej usporiadanej dvojici vektorov x, y reálny (alebo komplexný) skalár $\langle x \,|\, y\rangle$, pričom platí

- $\langle x \,|\, x\rangle$ je reálne číslo, $\langle x \,|\, x\rangle \geq 0$ a $\langle x \,|\, x\rangle = 0$ práve vtedy, keď $x = 0$,
- $\langle x \,|\, \alpha y\rangle = \alpha\langle x \,|\, y\rangle$ pre všetky skaláry α,
- $\langle x \,|\, y + z\rangle = \langle x \,|\, y\rangle + \langle x \,|\, z\rangle$,
- $\langle x \,|\, y\rangle = \overline{\langle y \,|\, x\rangle}$ (v reálnom priestore to znamená $\langle x \,|\, y\rangle = \langle y \,|\, x\rangle$).

Treba si všimnúť, že pre fixné x druhá a tretia vlastnosť hovoria, že $\langle x \,|\, \cdot\,\rangle : y \mapsto \langle x \,|\, y\rangle$ je lineárnou funkciou v premennej y.
Reálny (alebo komplexný) vektorový priestor so skalárnym súčinom sa nazýva *euklidovský priestor* (resp. hermitovský priestor).

*** Všeobecná Cauchy–Schwarzova nerovnosť**

Ak V je euklidovský (hermitovský) priestor a definujeme v ňom $\|\cdot\| = \sqrt{\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle}$, potom

$$|\langle x \,|\, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\| \qquad \text{pre všetky } x, y \in V.$$

Rovnosť nastáva iba ak $y = \alpha x$, kde $\alpha = \langle x \,|\, y\rangle / \|x\|^2$.

Norma v priestore so skalárnym súčinom

Ak V je euklidovský (hermitovský) priestor so skalárnym súčinom $\langle x \,|\, y\rangle$, potom predpis

$$\|\cdot\| = \sqrt{\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle}$$

definuje vektorovú normu na V.

** Rovnobežníková rovnosť

Pre danú normu $\|\cdot\|$ na vektorovom priestore V k nej existuje skalárny súčin na V, spĺňajúci $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle = \|\cdot\|^2$, práve vtedy, keď pre všetky $x, y \in V$ platí *rovnobežníková rovnosť*:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Kolmosť

V priestore V so skalárnym súčinom sa vektory $x, y \in V$ nazývajú *navzájom kolmé (ortogonálne)* ak $\langle x\,|\,y\rangle = 0$. Značíme $x \perp y$.

- V $\mathbb{R}^n$ so štandardným skalárnym súčinom máme $x \perp y \iff x^T y = 0$.
- V $\mathbb{C}^n$ so štandardným skalárnym súčinom máme $x \perp y \iff x^* y = 0$.

Uhly

V reálnom vektorovom priestore V je *uhol* medzi nenulovými vektormi $x, y \in V$ daný vzťahom

$$\cos\theta = \frac{\langle x\,|\,y\rangle}{\|x\|\,\|y\|} \qquad \text{pre } \theta \in \langle 0, \pi\rangle.$$

Ortonormálne množiny

Množina vektorov $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ sa nazýva *ortonormálna* ak $\|u_i\| = 1$ pre všetky i a $u_i \perp u_j$ pre všetky $i \neq j$. Inými slovami

$$\langle u_i\,|\,u_j\rangle = \begin{cases} 1 & \text{ak } i = j, \\ 0 & \text{ak } i \neq j. \end{cases}$$

- Každá ortonormálna množina je lineárne nezávislá.
- Každá ortonormálna množina pozostávajúca z n vektorov v n-rozmernom vektorovom priestore V tvorí *ortonormálnu bázu* priestoru V.

* Fourierov rozvoj

Ak $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ je ortonormálna báza vektorového priestoru V so skalárnym súčinom, potom sa každý vektor $x \in V$ dá vyjadriť ako

$$x = \langle u_1\,|\,x\rangle\, u_1 + \langle u_2\,|\,x\rangle\, u_2 + \cdots + \langle u_n\,|\,x\rangle\, u_n.$$

Takéto vyjadrenie sa (niekedy) nazýva *Fourierov rozvoj* x. Skaláry $\xi_i = \langle u_i\,|\,x\rangle$ sú súradnice x vzhľadom na $\mathcal{B}$ a nazývajú sa *Fourierove koeficienty*. Z geometrického pohľadu Fourierov rozvoj rozkladá vektor x na n navzájom kolmých vektorov $\langle u_i\,|\,x\rangle\, u_i$, z ktorých každý reprezentuje kolmú projekciu x do podpriestoru (priamky) generovaného u_i.

**** Gram–Schmidtov ortogonalizačný proces**

Ak $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ je báza vektorového priestoru S so skalárnym súčinom, potom *Gram-Schmidtova postupnosť* definovaná ako

$$u_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|} \qquad \text{a} \qquad u_k = \frac{x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle u_i \mid x_k \rangle \, u_i}{\left\| x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle u_i \mid x_k \rangle \, u_i \right\|} \qquad \text{pre} \qquad k = 2, \ldots, n$$

tvorí ortonormálnu bázu S.
Ak S je n-rozmerný podpriestor priestoru $\mathbb{C}^m$, Gram-Schmidtova postupnosť sa dá vyjadriť maticovo ako

$$u_k = \frac{(I - U_k U_k^*) x_k}{\|(I - U_k U_k^*) x_k\|} \qquad \text{pre} \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

kde $U_1 = 0_{m \times 1}$ a $U_k = (u_1 | u_2 | \ldots | u_{k-1})_{m \times (k-1)}$ pre $k > 1$.

**** QR rozklad**

Každá matica $A_{m \times n}$ s lineárne nezávislými stĺpcami sa dá jednoznačne vyjadriť ako súčin $A = QR$, kde $Q_{m \times n}$ má ortonormálne stĺpce tvoriace bázu stĺpcového priestoru $\mathcal{R}(A)$ a $R_{n \times n}$ je horná trojuholníková matica s kladnými zložkami na diagonále.

- QR rozklad presne popisuje Gram-Schmidtovu ortogonalizáciu lebo stĺpce matice $Q = (q_1 | q_2 | \ldots | q_n)$ tvoria Gram-Schmidtovu postupnosť pre stĺpce matice $A = (a_1 | a_2 | \ldots | a_n)$ a R je daná skalárnymi súčinmi

$$R = \begin{pmatrix} \nu_1 & q_1^* a_2 & q_1^* a_3 & \ldots & q_1^* a_n \\ 0 & \nu_2 & q_2^* a_3 & \ldots & q_2^* a_n \\ 0 & 0 & \nu_3 & \ldots & q_3^* a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \nu_n \end{pmatrix},$$

kde $\nu_1 = \|a_1\|$ a $\nu_k = \|a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle q_i \mid a_k \rangle \, q_i\|$ pre $k > 1$.

**** Lineárne systémy a QR rozklad**

Ak $h(A_{m \times n}) = n$ a $A = QR$ je QR rozklad matice A, potom riešenie regulárneho horného trojuholníkového systému

$$Rx = Q^T b$$

zodpovedá klasickému riešeniu $Ax = b$ alebo riešeniu $Ax = b$ v najmenších štvorcoch v závislosti od toho, či je $Ax = b$ konzistentný.

*** Modifikovaný Gram–Schmidtov algoritmus**

Pre lineárne nezávislú množinu $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{C}^m$ sa dá Gram-Schmidtova postupnosť alternatívne popísať ako

$$u_k = \frac{E_k \ldots E_2 E_1 x_k}{\|E_k \ldots E_2 E_1 x_k\|}, \quad \text{kde } E_1 = I \text{ a } E_i = I - u_{i-1} u_{i-1}^* \text{ pre } i > 1.$$

Táto postupnosť sa dá vytvoriť nasledujúcim algoritmom:

Pre $k = 1$: $u_1 \leftarrow x_1 / \|x_1\|$ a $u_j \leftarrow x_j$ pre $j = 2, 3, \ldots n$
Pre $k > 1$: $u_j \leftarrow E_k u_j = u_j - (u_{k-1}^* u_j) u_{k-1}$ pre $j = k, k+1, \ldots n$
$u_k \leftarrow u_k / \|u_k\|$

* Zhrnutie (Gram–Schmidt, najmenšie štvorce, QR rozklad)

- Ak sa použije Gram-Schmidtova procedúra (klasická alebo modifikovaná) na stĺpce A v presnej aritmetike, výsledkom je ortonormálna báza stĺpcového priestoru $\mathcal{R}(A)$.
- Pri výpočte QR rozkladu v aritmetike pohyblivej rádovej čiarky je modifikovaný algoritmus aspoň taký dobrý, ale často lepší, ako klasický algoritmus. Modifikovaný algoritmus však nie je "unconditionally" stabilný – existujú prípady, keď výsledné vektory nebudú zhruba ortonormálne.
- Pre riešenie problému najmenších štvorcov v aritmetike pohyblivej rádovej čiarky je modifikovaná procedúra numericky stabilným algoritmom v zmysle, že výsledok je presným riešením nejakého blízkeho problému najmenších štvorcov. Na druhej strane, Householderova metóda je podobne stabilná a vyžaduje si o trochu menej aritmetických operácií.

Unitárne a ortogonálne matice

- *Unitárna matica* je taká komplexná matica $U_{n\times n}$, ktorej stĺpce (alebo riadky) tvoria ortonormálnu bázu priestoru $\mathbb{C}^n$.
- *Ortogonálna matica* je taká reálna matica $Q_{n\times n}$, ktorej stĺpce (alebo riadky) tvoria ortonormálnu bázu priestoru $\mathbb{R}^n$.

Charakterizácia unitárnych a ortogonálnych matíc

- Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné tomu, že komplexná matica $U_{n\times n}$ je unitárna:
  - ▷ U má ortonormálne stĺpce.
  - ▷ U má ortonormálne riadky.
  - ▷ $U^{-1} = U^*$.
  - ▷ $\|Ux\|_2 = \|x\|_2$ pre všetky $x \in \mathbb{C}^n$.
- Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné tomu, že reálna matica $Q_{n\times n}$ je ortogonálna:
  - ▷ Q má ortonormálne stĺpce.
  - ▷ Q má ortonormálne riadky.
  - ▷ $Q^{-1} = Q^T$.
  - ▷ $\|Qx\|_2 = \|x\|_2$ pre všetky $x \in \mathbb{R}^n$.

** Elementárne kolmé projekcie

Pre vektor $u \in \mathbb{C}^n$ s normou $\|u\| = 1$ sa matica tvaru

$$P = I - uu^*$$

nazýva *elementárny kolmý projektor.*

** Geometria elementárnych projekcií

Pre vektory $u, x \in \mathbb{C}^n$, pričom $\|u\| = 1$, platí

- $(I - uu^*)x$ je kolmá projekcia vektora x do ortogonálneho doplnku $u^\perp$, t.j. do priestoru zloženého zo všetkých vektorov kolmých na vektor u;
- u^*ux je kolmá projekcia vektora x na jednorozmerný priestor $span(u)$;
- $|u^*x|$ predstavuje dĺžku ortogonálnej projekcie vektora x na jednorozmerný priestor $span(u)$.

** Elementárne reflexie

Pre nenulový vektor $u_{n\times 1}$ je *elementárna reflexia* cez $u^{\perp}$ definovaná maticou

$$R = I - 2\frac{uu^*}{u^*u}$$

alebo, ekvivalentne,

$$R = I - 2uu^* \qquad \text{ak} \qquad \|u\| = 1.$$

** Vlastnosti elementárnych reflexií

- Všetky elementárne reflexie R sú unitárne, hermitovské a involutórne ($R^2 = I$). T.j.
$$R = R^* = R^{-1}.$$
- Ak $x_{n\times 1}$ je vektor, ktorého prvá zložka $x_1 \neq 0$ a ak sa vektor
$$u = x \pm \mu\|x\|e_1, \qquad \text{kde} \quad \mu = \begin{cases} 1 & \text{ak } x_1 \text{ je reálna,} \\ x_1/|x_1| & \text{ak } x_1 \text{ nie je reálna} \end{cases}$$
použije na vytvorenie elementárnej reflexie R, potom
$$Rx = \mp\mu\|x\|e_1.$$
Inými slovami, R "zrkadlí" vektor x na prvú súradnicovú os.
Výpočtová poznámka: Aby sa vyhlo chybám/vynulovaniu pri výpočtoch v aritmetike pohyblivej rádovej čiarky, pre reálne matice sa volí $u = x + \operatorname{sign}(x_1)\|x\|e_1$.

* Rotácie v $\mathbb{R}^3$

Vektor $u \in \mathbb{R}^3$ sa dá zrotovať proti smeru hodinových ručičiek okolo súradnicovej osi vynásobením príslošnou ortogonálnou maticou P_*: $u \mapsto P_*u$.

Rotácia okolo osi x

$$P_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Rotácia okolo osi y

$$P_y = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Rotácia okolo osi z

$$P_z = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pozn. Znamienko mínus sa objavuje v maticiach P_x a P_z nad diagonálou, ale v matici P_y pod ňou. To nie je chyba, ale dôsledok orientácie kladnej časti x-ovej osi vzhľadom na rovinu yz pre P_x (a podobne pre P_y a P_z). Pozri str. 328 kvôli obrázkom.

* Rotácie rovín

Ortogonálne matice tvaru

$$P_ij = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & c & & & s & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & -s & & & c & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix},$$

kde $c^2 + s^2 = 1$, sa nazývajú *matice rotácií rovín*, lebo zodpovedajú rotácii (i,j)-roviny v $\mathbb{R}^n$. Zložky c a s sú inšpirované funkciami cos a sin, ale pre $\mathbb{R}^n$ vyššej dimenzie nemá zmysel, na rozdiel od $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$, hovoriť o uhle rovinnej rotácie, keďže jej "os" (fixný podpriestor) má dimenziu $n-2$.

* Rotácie v $\mathbb{R}^n$

Každý nenulový vektor $x \in \mathbb{R}^n$ sa dá zrotovať do i-tej súradnicovej osi postupnosťou $n-1$ rotácií rovín. Inými slovami, existuje ortogonálna matica P taká, že

$$Px = \|x\| e_i,$$

pričom P má tvar

$$P = P_{in} \dots P_{i,i+1} P_{i,i-2} \dots P_{i1}.$$

Pozn. Takéto rotácie sú základom tzv. Givensovej ortogonálnej redukcie.

** Ortogonálna redukcia

- Pre každú maticu $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ existuje unitárna matica $P_{m\times m}$ taká, že

  $$PA = T$$

  má horný lichobežníkový tvar. Ak sa P získa ako súčin elementárnych reflektorov, tento proces sa nazýva *Householderova redukcia.*
- Ak je A štvorcová matica, potom T je horná trojuholníková štvorcová matica.
- Ak je A reálna, potom sa aj P dá zvoliť s reálnymi zložkami – ide o ortogonálnu maticu.

** QR rozklad (obdĺžnikové matice)

- Pre každú regulárnu maticu $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ existujú jednoznačne určená ortogonálna matica Q a jednoznačne určená horná trojuholníková matica R s kladnými zložkami na diagonále také, že

  $$A = QR.$$

  Štvorcový QR-rozklad je špecialnym prípadom obdĺžnikového QR-rozkladu pre maticu A typu $m \times n$ s $h(A) = n$.

* Súhrn numerickej stability

- Gaussova eliminácia so škálovaním a čiastočným pivotovaním je teoreticky nestabilná, ale je "prakticky stabilná" – t.j. až na zriedkavé protipríklady je pri riešení praktických problémov stabilná.
- Kompletné pivotovanie robí Gaussovu elimináciu nepodmienečne stabilnou.
- Pre QR rozklad je Gram-Schmidtova procedúra (klasická alebo modifikovaná) nestabilná. Modifikovaná Gram-Schmidtova procedúra však je stabilná pre problém najmenších štvorcov.
- Householderova a Givensova redukcia obe predstavujú nepodmienečne stabilné algoritmy pre výpočet QR rozkladu.

* Súhrn výpočtovej zložitosti

Približný počet násobení/delení potrebných pre redukciu $n \times n$ matice na horný trojuholníkový tvar je:

- Gaussova elimninácia (škálovanie a čiastočné pivotovanie) $\approx n^3/3$.
- Gram-Schmidtova procedúra (klasická alebo modifikovaná) $\approx n^3$.
- Householderova redukcia $\approx 2n^3/3$.
- Givensova redukcia $\approx 4n^3/3$.

* Fourierova matica

Matica typu $n \times n$, ktorej zložka (j,k) je $\xi^{jk} = \omega^{-jk}$ pre $0 \leq j,k \leq n-1$ a $\omega = e^{2\pi i/n}$ sa nazýva *Fourierova matica* rádu n a má tvar:

$$F_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \xi & \xi^2 & \dots & \xi^{n-1} \\ 1 & \xi^2 & \xi^4 & \dots & \xi^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \xi^{n-1} & \xi^{n-2} & \dots & \xi \end{pmatrix}_{n\times n}$$

* Diskrétna Fourierova Transformácia

Pre vektor $x_{n\times 1}$ sa súčin $F_n x$ nazýva *diskrétna Fourierova transformácia* x a $F_n^{-1}x$ sa nazýva *inverzná transformácia* x. k-te zložky v $F_n x$ a $F_n^{-1}x$ sú dané

$$[F_n x]_k = \sum_{j=0}^{n-1} x_j \xi^j k \qquad \text{a} \qquad [F_n^{-1}x]_k = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} x_j \omega^{jk}.$$

* Veta o konvolúcii

Nech $a \times b$ označuje násobenie vektorov po zložkách

$$a \times b = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0\beta_0 \\ \alpha_1\beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}\beta_{n-1} \end{pmatrix}_{n\times 1}$$

a $\hat{a}$, $\hat{b}$ sú rozšírené vektory

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{2n\times 1} \qquad \text{a} \qquad \hat{b} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{2n\times 1}$$

Ak $F = F_{2n}$ je Fourierova matica rádu $2n$, potom

$$F(a \odot b) = (F\hat{a}) \times (F\hat{b}) \qquad \text{a} \qquad a \odot b = F^{-1}\left[(F\hat{a}) \times (F\hat{b})\right].$$

* Rozklad Fourierovej matice

Ak $n = 2^r$, potom

$$F_n = \begin{pmatrix} F_{n/2} & D_{n/2}F_{n/2} \\ F_{n/2} & -D_{n/2}F_{n/2} \end{pmatrix} P_n,$$

kde

$$D_{n/2} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \xi & & & \\ & & \xi^2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \xi^{\frac{n}{2}-1} \end{pmatrix}$$

obsahuje polovicu z n-tých odmocnín z jednotky a P_n je "párno-nepárna" permutačná matica definovaná ako

$$P_n^T = (e_0 e_2 e_4 \dots e_{n-2} e_1 e_3 e_5 \dots e_{n-1}).$$

* Rýchla Fourierova transformácia

Pre zadaný vstupný vektor x s $n = 2^r$ zložkami je diskrétna Fourierova transformácia $F_n x$ výsledkom nasledujúcich iterovaných výpočtov:

$X_{1\times n} \longleftarrow rev(x)$ (napísať vstup ako riadok)
Pre $j = 0, 1, 2, 3, \ldots, r-1$

$$D \longleftarrow \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-\pi i/2^j} \\ e^{-2\pi i/2^j} \\ e^{-3\pi i/2^j} \\ \vdots \\ e^{-(2^j-1)\pi i/2^j} \end{pmatrix}_{2^j\times 1} \qquad \text{(vložiť polovicu z } 2^{j+1}\text{-vých odmocnín z 1)}$$

$$X^{(0)} \longleftarrow \begin{pmatrix} X_{*0} & X_{*2} & X_{*4} & \ldots & X_{*2^{r-j}-2} \end{pmatrix}_{2^j\times 2^{r-j-1}}$$

$$X^{(1)} \longleftarrow \begin{pmatrix} X_{*1} & X_{*3} & X_{*5} & \ldots & X_{*2^{r-j}-1} \end{pmatrix}_{2^j\times 2^{r-j-1}}$$

$$X \longleftarrow \begin{pmatrix} X^{(0)} + D \times X^{(1)} \\ X^{(0)} - D \times X^{(1)} \end{pmatrix}_{2^{j+1}\times 2^{r-j-1}} \qquad \text{(kde } \times \text{ je definované ako } (D\times M)_{ij} = d_i m_{ij})$$

* Počet násobení vo FFT

Ak n je mocninou 2, potom sa pri použití FFT na n-zložkový vektor vyžaduje maximálne $(n/2)\log_2 n$ násobení.

** Komplementárne podpriestory

Podpriestory $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ priestoru $\mathcal{V}$ sa nazývajú *komplementárne*, ak

$$\mathcal{V} = \mathcal{X} + \mathcal{Y} \qquad \text{a} \qquad \mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = \left\{\vec{0}\right\}.$$

V tom prípade sa $\mathcal{V}$ nazýva *priamy súčet* $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$; značenie $\mathcal{V} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$.

Pre vektorový priestor $\mathcal{V}$ a jeho podpriestory $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ s bázami $\mathcal{B}_\mathcal{X}$ a $\mathcal{B}_\mathcal{Y}$ sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné

- $\mathcal{V} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$.
- Pre každé $v \in \mathcal{V}$ existuje jediná dvojica vektorov $x \in \mathcal{X}$ a $y \in \mathcal{Y}$ spĺňajúca $v = x + y$.
- $\mathcal{B}_\mathcal{X} \cap \mathcal{B}_\mathcal{Y} = \emptyset$ a $\mathcal{B}_\mathcal{X} \cup \mathcal{B}_\mathcal{Y}$ je báza $\mathcal{V}$.

** Projekcie

Nech $\mathcal{V} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$, teda pre každý vektor $v \in \mathcal{V}$ existujú jednoznačné vektory $x \in \mathcal{X}$ a $y \in \mathcal{Y}$ spĺňajúce $v = x + y$.

- Vektor x sa nazýva projekcia v na $\mathcal{X}$ v smere (pozdĺž) podpriestoru $\mathcal{Y}$.
- Vektor y sa nazýva projekcia v na $\mathcal{Y}$ v smere (pozdĺž) podpriestoru $\mathcal{X}$.

** Projekčné operátory

Nech $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ sú komplementárne podpriestory priestoru $\mathcal{V}$, t.j. každé $v \in \mathcal{V}$ sa dá jednoznačne rozložiť ako $v = x+y$ pre $x \in \mathcal{X}$ a $y \in \mathcal{Y}$. Jednoznačne daný lineárny operátor P daný predpisom $Pv = x$ sa nazýva *projektor na $\mathcal{X}$ v smere $\mathcal{Y}$* a platí preň:

- $P^2 = P \quad$ (P je idempotentný).
- $I - P$ je komplementárny projektor na $\mathcal{Y}$ v smere $\mathcal{X}$.
- $\mathcal{R}(P) = \{x \mid Px = x\} \quad$ (množina fixných bodov P)
- $\mathcal{R}(P) = \mathcal{N}(I-P) = \mathcal{X}$ a $\mathcal{R}(I-P) = \mathcal{N}(P) = \mathcal{Y}$.
- Ak $(V) = \mathbb{R}^n$ alebo $\mathbb{C}^n$, potom P sa dá maticovo vyjadriť ako
$$P = (X|0)\,(X|Y)^{-1} = (X|Y)\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}(X|Y)^{-1}$$
a komplementárny projektor Q ako
$$Q = I - P = (0|Y)\,(X|Y)^{-1} = (X|Y)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}(X|Y)^{-1},$$
kde stĺpce $X_{n\times r}$ a $Y_{n\times n-r}$ tvoria bázy $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$.

** Projekcie a idempotentné zobrazenia

Lineárny operátor P na vektorovom priestore $\mathcal{V}$ je projekčný operátor práve vtedy, keď $P^2 = P$.

* Rozklad na stĺpcový a nulový priestor

Pre každú singulárnu maticu $A_{n\times n}$ existuje kladné číslo k, pre ktoré sú priestory $\mathcal{R}(A^k)$ a $\mathcal{N}(A^k)$ navzájom komplementárne. Teda
$$\mathbb{R}^n = \mathcal{R}(A^k) \oplus \mathcal{N}(A^k).$$
Najmenšie kladné k, pre ktoré máme takýto rozklad sa nazýva *index* matice A. Pre regulárne matice definujeme $index(A) = 0$.

* Index matice

Index štvorcovej matice A je najmenšie nezáporné číslo pre ktoré platí ľubovoľná z nasledujúcich podmienok

- $h(A^k) = h(A^{k+1})$.
- $\mathcal{R}(A^k) = \mathcal{R}(A^{k+1})$ – t.j. moment, keď sa $\mathcal{R}(A^k)$ prestane zmenšovaťv postupnosti $\mathcal{R}(A^1) \supseteq \mathcal{R}(A^2) \supseteq \cdots \supseteq \mathcal{R}(A^k) \supseteq \mathcal{R}(A^{k+1}) \supseteq \dots$.
- $\mathcal{N}(A^k) = \mathcal{N}(A^{k+1})$ – t.j. moment, keď sa $\mathcal{N}(A^k)$ prestane zväčšovaťv postupnosti $\mathcal{N}(A^1) \subseteq \mathcal{N}(A^2) \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{N}(A^k) \subseteq \mathcal{N}(A^{k+1}) \subseteq \dots$.

Pre regulárne matice je $index(A) = 0$. Pre singulárne matice je $index(A)$ najmenšie *kladné* k pre ktoré

- $\mathcal{R}(A^k) \cap \mathcal{N}(A^k) = \{0\}$,
- $\mathbb{R}^n = \mathcal{R}(A^k) \oplus \mathcal{N}(A^k)$.

* Nilpotoentné matice

- $N_{n\times n}$ matica sa nazýva *nilpotentná* ak $N^k = 0$ pre nejaké kladné celé číslo k.
- $k = index(N)$ je najmenšie kladné číslo, pre ktoré $N^k = 0$. Niekedy sa zvykne $index(N)$ nazývať aj *index nilpotencie*.

*** Core–Nilpotent decomposition**

Ak je A singulárna $n \times n$ matica s indexom k, pričom $h(A^k) = r$, potom existuje regulárna matica Q, pre ktorú

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} C_{r\times r} & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix},$$

kde C je regulárna a N nilpotentná s indexom k. Inými slovami, A je podobná 2×2 blokovo-diagonálnej matici obsahujúcej regulárne *jadro* (core) a nilpotentnú časť. Takýto rozklad sa nazýva *core-nilpotent decomposition* matice A (neviem, či existuje slovenský termín).

Pozn. Ak je A regulárna, $k = 0$ a $r = n$, teda časť N sa v rozklade nevyskytuje a stačí zvoliť $Q = I$ a $C = A$ (regulárne jadro je celá matica). Pre regulárne matice teda tento rozklad nič nové neprináša.

Ortogonálny doplnok

Pre podmnožinu $\mathcal{M}$ v euklidovskom priestore $\mathcal{V}$ je *ortogonálny doplnok* $\mathcal{M}^\perp$ množiny $\mathcal{M}$ definovaný ako podpriestor všetkých vektorov vo $\mathcal{V}$, ktoré sú kolmé na každý vektor v $\mathcal{M}$. Teda

$$\mathcal{M}^\perp = \{x \in \mathcal{V} \,|\, \langle m \,|\, x\rangle = 0 \text{ pre všetky } m \in \mathcal{M}\}\,.$$

Rozklad priestoru

Ak $\mathcal{M}$ je podpriestor konečno-rozmerného priestoru $\mathcal{V}$ so skalárnym súčinom, potom

$$\mathcal{V} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp.$$

Navyše, ak je $\mathcal{N}$ podpriestor, pre ktorý $\mathcal{V} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$ a $\mathcal{M} \perp \mathcal{N}$ (každý vektor v $\mathcal{M}$ je kolmý na kaďý vektor v $\mathcal{N}$), potom

$$\mathcal{N} = \mathcal{M}^\perp.$$

Operácia ortogonálneho doplnku

Ak je $\mathcal{M}$ podpriestor n-rozmerného priestoru so skalárnym súčinom, potom platí:

- $\dim \mathcal{M}^\perp = n - \dim \mathcal{M}$.
- ${\mathcal{M}^\perp}^\perp = \mathcal{M}$.

Veta o ortogonálnom rozklade

Pre každú maticu $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ platí

$$\mathcal{R}(A)^\perp = \mathcal{N}(A^T) \qquad \text{a} \qquad \mathcal{N}(A)^\perp = \mathcal{R}(A^T).$$

K matici $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ teda prislúchajú ortogonálne rozklady priestorov $\mathbb{R}^m$ a $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^m = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(A)^\perp = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(A^T),$$

a

$$\mathbb{R}^n = \mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{N}(A)^\perp = \mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{R}(A^T).$$

** "URV" rozklad

Pre každú maticu $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ hodnosti r existujú ortogonálne matice $U_{m\times m}$ a $V_{n\times n}$ a regulárna matica $C_{r\times r}$ taká, že

$$A = URV^T = U \begin{pmatrix} C_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^T.$$

- Prvých r stĺpcov matice U tvorí ortonormálnu bázu $\mathcal{R}(A)$.
- Posledných $m-r$ stĺpcov matice U tvorí ortonormálnu bázu $\mathcal{N}(A^T)$.
- Prvých r stĺpcov matice V tvorí ortonormálnu bázu $\mathcal{R}(A^T)$.
- Posledných $n-r$ stĺpcov matice V tvorí ortonormálnu bázu $\mathcal{N}(A)$.

Každý výber ortonormálnych báz pre štyri základné podpriestory matice A vedie k jej inému URV rozkladu. V komplexnom prípade treba nahradiť "ortogonálne" "unitárnym" a transponovanie $(\cdot)^T$ hermitovským združením $(\cdot)^*$.

* Obraz kolmý na jadro

Pre štvorcové $n \times n$ matice s hodnosťou $h(A) = r$ sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné

- $\mathcal{R}(A) \perp \mathcal{N}(A)$,
- $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(A^T)$,
- $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A^T)$,
- $A = U \begin{pmatrix} C_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^T$, kde U je ortogonálna a C je regulárna. Takéto matice sa nazývajú *RPN* matice – skratka pre "range perpendicular to nulspace", "obraz kolmý na jadro". Niekedy sa nazývajú aj *range-symmetric* alebo *EP* matice. Regulárne matice sú RPN z triviálneho dôvodu – majú triviálny nulový priestor. Pre komplexné matice treba nahradiť transpozíciu $(\cdot)^T$ hermitovským združením $(\cdot)^*$ a ortogonálnu maticu U unitárnou.

** Singulárny rozklad

Pre každú maticu $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ hodnosti r existujú ortogonálne matice $U_{m\times m}$ a $V_{n\times n}$ a diagonálna matica $D_{r\times r} = \operatorname{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r)$ taká, že

$$A = U \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^T, \qquad \text{kde} \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0.$$

Reálne čísla σ_i sa nazývajú *singulárne hodnoty* matice A. Ak $r < p = \min\{m, n\}$, hovoríme, že A má dodatočných $p-r$ nulových singulárnych hodnôt. Takýto rozklad sa nazýva *singulárny rozklad* matice A (singular value decomposition), stĺpce matíc U a V sú ľavé, resp. pravé *singulárne vektory* matice A.

** Obraz jednotkovej sféry

Pre regulárnu $n \times n$ maticu A so singulárnymi hodnotami $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n$ a SVD rozkladom $A = UDV^T$ s $D = \operatorname{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ je obraz jednotkovej sféry vzhľadom na 2-normu elipsoid, ktorého k-ta polos je $\sigma_k U_{*k}$ (σ_k-násobok k-teho stĺpca matice U). Navyše, vektor V_{*k} reprezentuje bod na jednotkovej sfére, ktorý sa zobrazí na koncový bod tejto polosi, $AV_{*k} = \sigma_k U_{*k}$. Špeciálne

- $\sigma_1 = \|AV_{*1}\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \|A\|_2$,
- $\sigma_n = \|AV_{*n}\|_2 = \min_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = 1/\|A^{-1}\|_2$,

Miera deformácie (sploštenia) jednotkovej sféry transformáciou danou A vieme určiť pomocou *čísla podmienenosti* vzhľadom na 2-normu

- $\kappa_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_n} = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 \geq 1$.

Treba si všimnúť, že $\kappa_2 = 1$ práve vtedy, keď A je ortogonálna matica a ňou daná transformácia je izometria.

* Vzdialenosť od matíc nižšej hodnosti

Ak $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r$ sú nenulové singulárne hodnoty matice $A_{m\times n}$, potom pre každé $k < r$ je vzdialenosť A od najbližšej matice hodnosti k práve

$$\sigma_{k+1} = \max_{h(B)=k} \|A - B\|_2.$$

** Moore–Penrosove pseudoinverzné matice

Pomocou URV rozkladu sa dá Mooreova-Penroseova pseudoinverzná matica pre

$$A_{m\times n} = U \begin{pmatrix} C_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^T \qquad \text{vyjadriť ako} \quad A^\dagger_{n\times m} = V \begin{pmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^T.$$

- Ak je systém $Ax = b$ konzistentný, $x = A^\dagger b$ je jeho riešenie s minimálnou euklidovskou normou.
- Ak je systém $Ax = b$ nekonzistentný, $x = A^\dagger b$ je jeho riešením v najmenších štvorcoch s minimálnou euklidovskou normou.
- Pri použití SVD-rozkladu s $C = D = \operatorname{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r)$ máme

$$A^\dagger = V \begin{pmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^T = \sum_{i=1}^{r} \frac{v_i u_i^T}{\sigma_i} \qquad \text{a} \quad A^\dagger b = \sum_{i=1}^{r} \frac{(u_i^T b)}{\sigma_i} v_i.$$

** Kolmé (ortogonálne) projekcie

Pre $v \in \mathcal{V}$ majme rozklad $v = m + n$, pričom $m \in \mathcal{M}$ a $n \in \mathcal{M}^\perp$.

- Vektor m sa nazýva *kolmá (ortogonálna) projekcia* v na $\mathcal{M}$.
- Projekčný operátor $P_{\mathcal{M}}$ na $\mathcal{M}$ v smere $\mathcal{M}^\perp$ sa nazýva *ortogonálny projektor* na $\mathcal{M}$.
- $P_{\mathcal{M}}$ je (jediný) lineárny operátor spĺňajúci $P_{\mathcal{M}} v = m$.

** Konštrukcie matíc kolmej projekcie

Nech $\mathcal{M}$ je r-rozmerný podpriestor $\mathbb{R}^n$ a stĺpce $M_{n\times r}$, $N_{n\times n-r}$ tvoria bázy $\mathcal{M}$, resp. $\mathcal{M}^\perp$. Ortogonálne projektory na $\mathcal{M}$ a $\mathcal{M}^\perp$ sú

- $P_{\mathcal{M}} = M\left(M^TM\right)^{-1}M^T \quad$ a $\quad P_{\mathcal{M}^\perp} = N\left(N^TN\right)^{-1}N^T$;
- navyše platí $P_{\mathcal{M}^\perp} = I - P_{\mathcal{M}}$.

Ak sú stĺpce matíc M a N *ortonormálne*, potom

- $P_{\mathcal{M}} = MM^T \quad$ a $\quad P_{\mathcal{M}^\perp} = NN^T$.
- $P_{\mathcal{M}} = U\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^T$, pre ortogonálnu maticu $U = (M|N)$.

** Charakterizácia projekčných matíc

Nech $P \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ je matica projekčného operátora, t.j. $P^2 = P$. Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné tomu, že P je matica *kolmej* projekcie:

- $\mathcal{R}(P) \perp \mathcal{N}(P)$.
- $P = P^T \quad$ (t.j. P reprezentuje kolmú projekciu $\Longleftrightarrow PP^T = P^2 = P = P^T$).
- $\|P\|_2 = 1$ pre maticovú 2-normu.

** Najbližší bod podpriestoru

Nech $\mathcal{M}$ je podpriestor euklidovského vektorového priestoru $\mathcal{V}$ a b je vektor (bod) vo $\mathcal{V}$. Potom v $\mathcal{M}$ existuje jediný najbližší vektor (bod) p k b a je to práve kolmá projekcia $p = P_{\mathcal{M}}b$. Teda

$$\min_{m\in\mathcal{M}} \|b - m\| = \|b - P_{\mathcal{M}}b\| = dist(b, \mathcal{M}).$$

Táto vzdialenosť sa nazýva *kolmou vzdialenosťou* medzi b a $\mathcal{M}$.

** Riešenie v najmenších štvorcoch

Nasledujúce štyri tvrdenia sú ekvivalentné tomu, že $\hat{x}$ je riešením systému $Ax = b$ v najmenších štvorcoch:

- $\|A\hat{x} - b\| = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax - b\|$.
- $A\hat{x} = P_{\mathcal{R}(A)}b$.
- $A^TA\hat{x} = A^Tb \qquad$ (resp. $A^*A\hat{x} = A^*b$ ak $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$).
- $\hat{x} \in A^\dagger b + \mathcal{N}(A) \quad$ ($A^\dagger b$ je riešením v najmenších štvorcoch s najmenšou 2-normou).

Pozor! Tento popis je významný z pohľadu teórie, ale v aritmetike pohyblivej čiarky zvyknú byť výpočty nestabilné (podmienenosť: $\kappa_{A^TA} \gg \kappa_A$; výpočet $A^\dagger$ môže byť numericky nestabilný).

Definícia determinantu

Pre $n \times n$ maticu $A = [a_{ij}]$ je jej *determinant* daný výrazom

$$\det(A) = \sum_p \sigma(p) a_{1p_1} a_{2p_2} \dots a_{np_n},$$

kde sčítame cez $n!$ permutácií $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ n-prvkovej množiny $(1, 2, \dots, n)$; $\sigma(p)$ označuje *signatúru permutácie* p. Treba si všimnúť, že výraz $a_{1p_1}a_{2p_2}\dots a_{np_n}$ obsahuje práve po jednej zložke z každého riadku a stĺpca matice A. Značenie: $\det(A)$ alebo $|A|$.
Pozn. Determinant nie je definovaný pre matice, ktoré nie sú štvorcové.

Determinant trojuholníkovej matice

Determinant trojuholníkovej matice je súčin jej diagonálnych zložiek, t.j.

$$\begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t_{nn} \end{vmatrix} = t_{11}t_{22}\dots t_{nn}.$$

Transpozícia nemení determinant

- $\det(A^T) = \det(A)$ pre všetky $n \times n$ matice.

Determinant a riadkové operácie

Nech B je matica, ktorú získame z matice $A_{n\times n}$ vykonaním jednej z troch elementárnych riadkových operácií:

- Typ I: Vymeniť riadky i a j.
- Typ II: Vynásobiť i-ty riadok nenulovým skalárom α.
- Typ III: Pripočítať α-násobok riadku i k riadku j.

Hodnota $\det(B)$ potom je:

- $\det(B) = -\det(A)$ pre operácie Typu I.
- $\det(B) = \alpha \det(A)$ pre operácie Typu II.
- $\det(B) = \det(A)$ pre operácie Typu III.

Determinant a invertibilita

- $A_{n\times n}$ je regulárna práve vtedy, keď $\det(A) \neq 0$ alebo ekvivalentne
- $A_{n\times n}$ je singulárna práve vtedy, keď $\det(A) = 0$.

Hodnosť a determinant

- $h(A)$ = veľkosť najväčšieho nenulového minoru matice A (subdeterminantu $k \times k$ podmatice).

Súčinové pravidlá

- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ pre všetky $n \times n$ matice.
- $\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(B)$ ak A a D sú štvorcové.

Výpočet determinantu

Ak $PA_{n\times n} = LU$ je LU rozklad s prípadnou výmenou riadkov (a použitím čiastočného pivotovania pre numerickú stabilitu), potom

$$\det(A) = \sigma u_{11}u_{22}\dots u_{nn}.$$

Členy u_{ii} sú pivoty a σ je znamienko (signatúra) permutácie, t.j.

$$\sigma = \begin{cases} +1 & \text{ak sa spraví } \textit{párny} \text{ počet výmen riadkov,} \\ -1 & \text{ak sa spraví } \textit{nepárny} \text{ počet výmen riadkov.} \end{cases}$$

Ak sa počas eliminácie vyskytne nulový pivot, ktorý sa nedá odstrániť (keďže všetky zložky pod ním sú nulové), tak je matica A singulárna a $\det(A) = 0$. Pozri úlohu 6.2.18 pre výpočet determinantu pomocou ortogonálnej redukcie.

* Derivácia determinantu

Ak sú zložky matice $A_{n\times n} = [a_{ij}(t)]$ diferencovateľné funkcie v premennej t, potom

$$\frac{d(\det(A))}{dt} = \det(D_1) + \det(D_2) + \cdots + \det(D_n),$$

kde D_i sa zhoduje s A okrem zložiek v i-tom riadku, ktorý je nahradený riadkom deriváciií, t.j.

$$[D_i]_{k*} = \begin{cases} A_{k*} & \text{ak} \quad i \neq k \\ dA_{k*}/dt & \text{ak} \quad i = k. \end{cases}$$

* Blokové determinanty

Ak A a D sú štvorcové matice, potom

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{cases} \det(A)\det(D - CA^{-1}B) & \text{ak } A^{-1} \text{ existuje,} \\ \det(D)\det(A - BD^{-1}C) & \text{ak } D^{-1} \text{ existuje.} \end{cases}$$

Matice $D - CA^{-1}B$ a $A - BD^{-1}C$ sa nazývajú *Schurove doplnky* matíc A, resp. D.

* Zmena hodnosti 1

Ak $A_{n\times n}$ je regulárna a c a d sú $n \times 1$ stĺpce, potom

- $\det(I + cd^T) = 1 + dc^T$,
- $\det(A + cd^T) = det(A)(1 + d^T A^{-1} c)$.

Pozri úlohu 6.2.7. pre zovšeobecnenie.

Cramerovo pravidlo

Pre regulárny systém $A_{n\times n}x = b$ je i-ta zložka riešenia

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)},$$

kde $A_i = [A_{*1}|\dots|A_{*i-1}|b|A_{*i+1}|\dots A_{*n}]$. Teda A_i sa zhoduje s A okrem i-teho stĺpca, ktorý nahradíme pravou stranou b.

Kofaktory

Kofaktor (algebraický doplnok) matice $A_{n\times n}$ prislúchajúci pozícii (i,j) je

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

kde M_{ij} je $(n-1)\times(n-1)$ minor (determinant podmatice) získaný zmazaním i-ho riadku a j-ho stĺpca matice A.

Rozvoj pomocou kofaktorov

- $\det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$ (rozvoj podľa riadku i).
- $\det(A) = a_{1i}A_{1i} + a_{2i}A_{2i} + \cdots + a_{ni}A_{ni}$ (rozvoj podľa stĺpca i).

Vzorec pre A^{-1} pomocou determinantov

Adjungovaná matica $\operatorname{adj}(A)$ k matici $A_{n\times n}$ získame z matice kofaktorov transponovaním, t.j. $[\operatorname{adj}(A)]_{ij} = A_{ji}$. Ak je A regulárna, potom

$$A^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(A)}{\det(A)}.$$