Podvádzanie pri skúške je vážnym porušením Študijného poriadku FMFI UK, ktoré môže viesť k vylúčeniu zo štúdia. Nerobte hlúposti. Počas písomky je zakázané používať mobilné telefóny a iné elektronické zariadenia. Veľa zdaru!

Skúška z Maticového počtu I., 13. január 2023

1. Nech A, B, C a D sú $n\times n$ matice, pričom AB^T a CD^T sú obe symetrické a platí $AD^T - BC^T = I$.
a) Ukážte, že $\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} D^T & -B^T \\ -C^T & A^T \end{smallmatrix}\right)$.
b) Ukážte, že aj

$$A^T D - C^T B = I.$$

2. Majme 5×5 maticu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) Nájdite hodnosť A a $A^T A$.
b) Nájdite spektrum A a $A^T A$.
b) Nájdite 2-normu matice A

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2 = 1} \|Ax\|_2$$

a vektor, v ktorom sa toto maximum nadobúda.

3. Nech A a B sú $n\times n$ reálne symetrické matice. Predpokladajme, že platí

$$A^2 = A, \qquad B^2 = B \qquad \text{a} \qquad AB + BA = 0.$$

a) Ukážte, že A+B je maticou kolmej projekcie.
b) Vyjadrite $\mathcal{R}(A+B)$ a $\mathcal{N}(A+B)$ pomocou podpriestorov $\mathcal{R}(A)$, $\mathcal{R}(B)$, $\mathcal{N}(A)$ a $\mathcal{N}(B)$.
c) Ukážte, že $AB = 0$, a teda A a B komutujú.

4. Nech A a B sú $n\times n$ matice. Ukážte, že platí rovnosť

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A+B)\det(A-B).$$

5. *Iwasawov rozklad* regulárnej reálnej $n\times n$ matice A je súčin troch reálnych $n\times n$ matíc $A = ODN$, kde N je horná trojuholníková s jednotkami na diagonále, D je diagonálna s kladnými zložkami na diagonále a O je ortogonálna.
a) Ukážte, že Iwasawov rozklad matice A je jednoznačný.
b) Vysvetlite súvis QR rozkladu a Iwasawovho rozkladu. Dokážte, že Iwasawov rozklad existuje pre každú regulárnu reálnu $n\times n$ maticu.
c) Nájdite Iwasawov rozklad pre maticu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Nech B je $k\times k$ hlavná podmatica kladnej $n\times n$ matice A. Ukážte, že pre spektrálne polomery platí

$$\rho(B) < \rho(A).$$

Návod: Uvažujte Perronov vektor podmatice B a použite Collatz-Wielandtovu formulu.