Maticový počet – Úloha č. 1

Cvičenia v týždni 30. septembra 2024

Úlohy (strany a číslovanie) sú z knihy Carla D. Meyera *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra.* Toto by mala byť jediná úloha, kde sa bude počítať v aritmetike pohyblivej čiarky (floating point).

1. Ukážte, že súčin dvoch matíc hodnosti 1 je matica hodnosti 1 alebo 0.

2. Nájdite vyjadrenie pre mocniny $\left(uv^T\right)^k$, rozhodnite kedy sa dá na výpočet $\left(I - uv^T\right)^{-1}$ použiť Neumannov rad $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$ a nájdite iné odvodenie vzťahu pre inverznú maticu k elementárnej matici z minulého cvičenia: $\left(I - uv^T\right)^{-1} = I - \frac{uv^T}{v^Tu-1}$. Čo sa dá povedať o prípade, keď nie je splnený predpoklad konvergencie Neumannovho radu?

3. (1.3.4) Overte, že počet operácií v Gauss-Jordanovej eliminácii pre $n \times n$ maticu zodpovedá údajom uvedeným v texte, t.j. násobení/delení je $\frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{2}$ a sčítaní/odčítaní je $\frac{n^3}{2} - \frac{n}{2}$.

4. (1.5.1) Uvažujme nasledujúci systém:

$$\begin{aligned} 10^{-3}x - y &= 1, \\ x + y &= 0. \end{aligned}$$

(a) Vyriešte tento systém použitím 3-číslicovej aritmetiky (báza je 10) bez pivotovania.
(b) Nájdite systém, ktorého presné riešenie je to, ktoré ste našli v časti (a) a posúďte ako blízko je tento systém pôvodnému. (snažte sa nájsť systém, ktorý je čo “najbližšie” k pôvodnému – napr. zmení sa len jedna zložka v matici/pravej strane o čo najmenšiu hodnotu)
(c) Použite čiastočné pivotovanie a 3-číslicovú aritmetiku na vyriešenie pôvodného systému.
(d) Nájdite systém (opäť čo najbližšie k pôvodnému), ktorého presné riešenie je to, ktoré ste našli v časti (c) a posúďte ako blízko je tento systém pôvodnému.
(e) Použite presnú aritmetiku na nájdenie riešenia pôvodného systému a porovnajte toto presné riešenie s riešeniami z (a) a (c)
(f) Zaokrúhlite presné riešenie na tri platné číslice a porovnajte s výsledkom z (a) a (c)

5. (1.5.4) Uvažujme nasledujúci systém, ktorého matica koeficientov je *Hilbertova matica*:

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z &= \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{4}z &= \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{5}z &= \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

(a) Najprv preveďte koeficienty na 3-číslicové čísla s pohyblivou čiarkou (floating point), potom použite 3-číslicovú aritemtiku s čiastočným pivotovaním (bez škálovania) na vyriešenie systému.
(b) Opäť použite 3-číslicovú aritmetiku, ale škálujte riadky (po konverzii na 3-číslicové čísla s pohyblivou čiarkou) a následne použite čiastočné pivotovanie na nájdenie riešienia.
(c) Postupujte ako v časti (b) ale tentoraz škálujte koeficienty po riadkoch pred každým krokom eliminácie.
(d) Použitím presnej aritmetiky v pôvodnom systéme nájdite jeho presné riešenie a to porovnajte s riešeniami z častí (a), (b) a (c).

Na stránke `http://matrixcalc.org/en/` sa dá nájsť maticová kalkulačka, ktorá pracuje so zlomkami. Podobná kalkulačka sa v minulosti nachádzala aj na `http://www.uni-bonn.de/ manfear/matrixcalc.php`, pričom sa v roku 2008 pri výpočte LU-rozkladu 4×4 Hilbertovej matice A mýlila.
(pozri príklad č. 1 v staršej DÚ `http://thales.doa.fmph.uniba.sk/niepel/linalg208/du11.pdf`)

6. (1.5.7) Uvažujme nasledujúcu dobre škálovanú maticu:

$$W_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Eliminujte W_n na horný trojuholníkový tvar pomocou Gaussovej eliminácie s čiastočným pivotovaním a určite zložku s maximálnou veľkosťou, ktorá sa počas eliminácie vo výpočtoch vyskytne.

(b) Spravte to isté ako v časti (a) použijúc kompletné pivotovanie.

(c) Sformulujte tvrdenie porovnávajúce výsledky eliminácie s čiastočným a úplným pivotovaním pre maticu W_n a popíšte, aký by to malo efekt na t-číslicové riešenie systému s rozšírenou maticou $(W_n|b)$.

Pozri aj úlohu (1.5.8.)

7. (2.5.8) Riešte nasledujúci systém v aritmetike pohyblivej čiarky (bez pivotovania alebo škálovania):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} .835 & .667 & .5 & .168 \\ .333 & .266 & .1994 & .067 \\ 1.67 & 1.334 & 1.1 & .436 \end{array}\right).$$

(a) Nájdite 4-číslicové všeobecné riešenie.

(b) Nájdite 5-číslicové všeobecné riešenie.

(c) Nájdite 6-číslicové všeobecné riešenie.