

Úlohy (strany a číslovanie) sú z knihy Carla D. Meyera *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*.

1. (1.6.6) Ukážte, že systém

$$\begin{aligned}v - w - x - y - z &= 0, \\w - x - y - z &= 0, \\x - y - z &= 0, \\y - z &= 0, \\z &= 1,\end{aligned}$$

je zle podmienený porovnaním s perturbovaným systémom:

$$\begin{aligned}v - w - x - y - z &= 0, \\-\frac{1}{15}v + w - x - y - z &= 0, \\-\frac{1}{15}v + x - y - z &= 0, \\-\frac{1}{15}v + y - z &= 0, \\-\frac{1}{15}v + z &= 1.\end{aligned}$$

2. (3.7.8) Ak sú  $A$ ,  $B$  a  $A + B$  regulárne, ukážte, že platí

$$A(A + B)^{-1}B = B(A + B)^{-1}A = (A^{-1} + B^{-1})^{-1}.$$

3. (3.7.10) Overte, že pre matice  $A_{r \times r}$ ,  $B_{s \times s}$  a  $C_{r \times s}$ , pričom  $A$  a  $B$  sú regulárne, platí

$$\begin{aligned}\text{(a)} \quad \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix} \\ \text{(b)} \quad \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

4. (3.7.11) Uvažujme blokovú maticu  $\begin{pmatrix} A_{r \times r} & C_{r \times s} \\ R_{s \times r} & B_{s \times s} \end{pmatrix}$ . Ak príslušné inverzné matice existujú, matice definované vzťahmi

$$S = B - RA^{-1}C \quad \text{a} \quad T = A - CB^{-1}R$$

sa nazývajú *Schurove doplnky*  $A$ , resp.  $B$ .

(a) Overte, že ak  $A$  a  $S$  sú regulárne, potom

$$\begin{pmatrix} A & C \\ R & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}CS^{-1}RA^{-1} & -A^{-1}CS^{-1} \\ -S^{-1}RA^{-1} & S^{-1} \end{pmatrix}.$$

(b) Overte, že ak  $B$  a  $T$  sú regulárne, potom

$$\begin{pmatrix} A & C \\ R & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} T^{-1} & -T^{-1}CB^{-1} \\ -B^{-1}RT^{-1} & B^{-1} + B^{-1}RT^{-1}CB^{-1} \end{pmatrix}.$$

5. (3.8.3) Predpokladajme, že maticu koeficientov regulárneho systému  $Ax = b$  aktualizujeme a dostaneme nový regulárny systém  $(A + cd^T)z = b$ , kde  $b, c, d \in \mathbb{R}^n$ . Ak  $y$  je riešením  $Ay = c$ , ukážte, že  $z = x - yd^T x / (1 + d^T y)$ .

**6.** (3.8.4) (a) Použite Sherman-Morrisonovu formulu na dôkaz toho, že ak je  $A$  regulárna, potom  $A + \alpha e_i e_j^T$  je regulárna pre dostatočne malé  $\alpha$ .

(b) Použite časť (a) na dôkaz toho, že  $I + E$  je regulárna, ak sú všetky zložky  $\epsilon_{ij}$  matice  $E$  dostatočne malej veľkosti. Toto je alternatívne zdôvodnenie k využitiu Neumannovho radu pre dôkaz existencie  $(I + E)^{-1}$ .

**7.** (3.8.5) Pre dané matice  $A$  a  $B$ , kde  $A$  je regulárna, zdôvodnite, prečo bude regulárna aj matica  $A + \epsilon B$  pre dostatočne malé  $\epsilon$ . Inými slovami, ukážte, že malé perturbácie regulárnej matice sú opäť regulárne, resp. že regulárne matice tvoria otvorenú množinu v priestore matíc.

**8.** (3.8.6) Odvodte Sherman-Morrison-Woodburyho formulu

$$(A + CD^T)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}C(I + D^T A^{-1}C)^{-1}D^T A^{-1}.$$

*Návod:* (3.7.11) a pozrite sa na súčin  $\begin{pmatrix} I & C \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ D^T & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ D^T & I \end{pmatrix}$ .

**9.** (3.8.8) Predpokladajme, že zložky v  $A(t)$ ,  $x(t)$  a  $b(t)$  sú diferencovateľné funkcie v premennej  $t$  a pre všetky  $t$  platí  $A(t)x(t) = b(t)$ .

(a) Za predpokladu existencie  $A(t)^{-1}$  zdôvodnite platnosť

$$\frac{dA(t)^{-1}}{dt} = -A(t)^{-1}A'(t)A(t)^{-1}.$$

(b) Odvodte rovnicu

$$x'(t) = A(t)^{-1}b'(t) - A(t)^{-1}A'(t)x(t).$$

Toto dokazuje, že  $A^{-1}$  zväčšuje okamžitú zmenu v  $A$  aj okamžitú zmenu v  $b$ , čím sa potvrdzuje pozorovanie, že citlivosť regulárneho systému na malé perturbácie je priamo úmerná veľkosti zložiek  $A^{-1}$ .

*Pozri prípadne (3.5.9) pre deriváciu súčinu matíc.*