Maticový počet – Úloha č. 5

Cvičenia v týždni 28. októbra 2024

Úlohy (strany a číslovanie) sú z knihy Carla D. Meyera *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra.*

1. (4.6.10) V aplikáciách metódy najmenších štvorcov sa často stane, že matica dát $A_{m\times n}$ nemá lineárne nezávislé stĺpce, t.j. $h(A) < n$, a následne príslušný systém normálnych rovníc $A^TAx = A^Tb$ nemá jednoznačné riešenie. To potom znamená, že aj nejaká odhadovaná veličina y, ktorá je lineárnou funkciou hľadaných parametrov $x = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)^T$, napr.

$$y = \alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2 + \cdots + \alpha_n t_n + \varepsilon,$$

môže nadobúdať pre nekonečne veľa riešení x nekonečne veľa rôznych hodnôt, čo je nežiaduce.

V takom prípade má zmysel obmedziť sa iba na tie n-tice $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, ktoré ležia v riadkovom priestore matice A.

Ukážte, že ak

$$t = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} \in \mathcal{R}(A^T) \quad \text{a} \quad x = \begin{pmatrix} \hat{\alpha_1} \\ \hat{\alpha_2} \\ \vdots \\ \hat{\alpha_n} \end{pmatrix}$$

je ľubovoľné riešenie $Ax = b$ v najmenších štvorcoch (t.j. $A^TAx = A^Tb$), potom je odhad

$$\hat{y} = t^Tx = \sum_{i=1}^{n} t_i\hat{\alpha}_i$$

jednoznačný v tom, že nezávisí od voľby konkrétneho riešenia x v najmenších štvorcoch.

2. (5.9.7) Predpokladajme, že $\mathcal{V} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$ a P je projektor na $\mathcal{X}$ v smere $\mathcal{Y}$. Ukážte, že platí

$$\mathcal{R}(P) = \mathcal{N}(I - P) = \mathcal{X} \quad \text{a} \quad \mathcal{R}(I - P) = \mathcal{N}(P) = \mathcal{Y}.$$

3. (5.9.12) Nech P a Q sú projekčné operátory.

(a) Ukážte, že $\mathcal{R}(P) = \mathcal{R}(Q)$ práve vtedy, keď $PQ = Q$ a $QP = P$.

(b) Ukážte, že $\mathcal{N}(P) = \mathcal{N}(Q)$ práve vtedy, keď $PQ = P$ a $QP = Q$.

(c) Ukážte, že ak E_1, E_2, …, E_k sú projektory s rovnakým obrazom a $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ sú skaláry spĺňajúce $\sum_j \alpha_j = 1$, potom je aj $\sum_j \alpha_j E_j$ projektor.

4. (5.9.17) Majme reálny alebo komplexný vektorový priestor, E je projektor na $\mathcal{X}_1$ v smere $\mathcal{Y}_1$ a F je projektor na $\mathcal{X}_2$ v smere $\mathcal{Y}_2$. Ukážte, že $E + F$ je projektor práve vtedy, keď $EF = FE = 0$, a v tom prípade $\mathcal{R}(E + F) = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$ a $\mathcal{N}(E + F) = \mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{Y}_2$.

5. (5.9.18) Majme reálny alebo komplexný vektorový priestor, E je projektor na $\mathcal{X}_1$ v smere $\mathcal{Y}_1$ a F je projektor na $\mathcal{X}_2$ v smere $\mathcal{Y}_2$. Ukážte, že $E - F$ je projektor práve vtedy, keď $EF = FE = F$, a v tom prípade $\mathcal{R}(E - F) = \mathcal{X}_1 \cap \mathcal{Y}_2$ a $\mathcal{N}(E - F) = \mathcal{Y}_1 \oplus \mathcal{X}_2$.

Návod: P je projektor práve vtedy, keď je $(I - P)$ projektor.

6. (5.9.19) Majme reálny alebo komplexný vektorový priestor, E je projektor na $\mathcal{X}_1$ v smere $\mathcal{Y}_1$ a F je projektor na $\mathcal{X}_2$ v smere $\mathcal{Y}_2$. Ukážte, že ak $EF = P = FE$, potom P je projektor na $\mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2$ v smere $\mathcal{Y}_1 + \mathcal{Y}_2$.

7. (5.9.20) *Vnútorný pseudoinverz* pre $A_{m\times n}$ je matica $X_{n\times m}$ spĺňajúca $AXA = A$, a *vonkajší pseudoinverz* pre A je matica X spĺňajúca $XAX = X$. Ak je X zároveň vonkajší aj vnútorný pseudoinverz, nazýva sa *reflexívny pseudoinverz.*

(a) Ak $Ax = b$ je konzistentný systém m rovníc o n neznámych a A^- je ľubovoľný vnútorný pseudoinverz matice A, zdôvodnite prečo sa dá množina všetkých riešení $Ax = b$ vyjadriť ako

$$A^-b + \mathcal{R}(I - A^-A) = \left\{A^-b + (I - A^-A)h \,|\, h \in \mathbb{R}^n\right\}.$$

(b) Nech $\mathcal{M}$ a $\mathcal{L}$ sú nejaké komplementárne priestory k $\mathcal{R}(A)$ a $\mathcal{N}(A)$, t.j. $\mathbb{C}^m = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{M}$ a $\mathbb{C}^n = \mathcal{L} \oplus \mathcal{N}(A)$. Ukážte, že existuje jediný reflexívny pseudoinverz X matice A spĺňajúci $\mathcal{R}(X) = \mathcal{L}$ a $\mathcal{N}(X) = \mathcal{M}$. Ukážte, že $X = QA^-P$, kde A^- je ľubovoľný vnútorný pseudoinverz pre A, P je projektor na $\mathcal{R}(A)$ v smere $\mathcal{M}$ a Q je projektor na $\mathcal{L}$ v smere $\mathcal{N}(A)$.

8. (5.13.3) Ukážte, že pre ortogonálny projektor P platí $\|Px\| = \|x\|$ práve vtedy, keď $x \in \mathcal{R}(P)$.

9. (5.13.4) Vysvetlite prečo $A^T P_{\mathcal{R}(A)} = A^T$ pre $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

10. (5.13.5) Vysvetlite prečo $P_{\mathcal{M}} = \sum_{i=1}^{r} u_i u_i^T$, ak $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_r\}$ je nejaká ortonormálna báza podpriestoru $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$.

11.(5.13.13) Nech $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ sú podpriestory priestoru $\mathcal{V}$ a $P_{\mathcal{M}}$, $P_{\mathcal{N}}$ sú príslušné ortogonálne projekčné operátory.
(a) Ukážte, že $P_{\mathcal{M}} P_{\mathcal{N}} = 0$ práve vtedy, keď $\mathcal{M} \perp \mathcal{N}$.
(b) Je pravdou, že $P_{\mathcal{M}} P_{\mathcal{N}} = 0$ práve vtedy, keď $P_{\mathcal{N}} P_{\mathcal{M}} = 0$? Vysvetlite.