Maticový počet – Úloha č. 8

Cvičenia v týždni 18. novembra 2024

Úlohy (strany a číslovanie) sú z knihy Carla D. Meyera *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra.*

1. (5.3.4) Ukážte, že v reálnom vektorovom priestore so skalárnym súčinom a normou $\|\cdot\|^2 = \langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$ platí nerovnosť

$$\langle x\,|\,y\rangle \leq \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2}{2}.$$

Návod: Uvažujte $x - y$.

2. (5.3.5) Zôvodnite prečo pre $n \times n$ matice A a B platia nasledujúce nerovnosti:
a) $|\operatorname{Tr}(B)|^2 \leq n(\operatorname{Tr}(B^*B))$.
b) $\operatorname{Tr}(B^2) \leq \operatorname{Tr}(B^TB)$ pre reálne matice.
c) $\operatorname{Tr}(A^TB) \leq \frac{\operatorname{Tr}(A^TA)+\operatorname{Tr}(B^TB)}{2}$ pre reálne matice.

3. (5.3.6) Pozrite si dôkaz rovnobežníkovej rovnosti na str. 290 a rozšírte ho na komplexné vektorové priestory.
Návod: Ak je v komplexnom vektorovom priestore V s normou $\|\cdot\|$ splnená rovnobežníková identita, zvoľte

$$\langle x\,|\,y\rangle_r = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4}$$

a ukážte, že

$$\langle x\,|\,y\rangle = \langle x\,|\,y\rangle_r + i\langle ix\,|\,y\rangle_r \qquad \textit{(polarizačná identita)}$$

definuje hermitovský skalárny súčin na V.

4. (5.3.8) Vysvetlite prečo Frobeniova maticová norma spĺňa rovnobežníkovú identitu na $M_{n\times n}(\mathbb{C})$.

5. (5.6.7) Predpokladajme, že R a S sú matice elementárnych reflexií.
a) Je $\left(\begin{smallmatrix} I & 0 \\ 0 & R \end{smallmatrix}\right)$ elementárna reflexia?
b) Je $\left(\begin{smallmatrix} R & 0 \\ 0 & S \end{smallmatrix}\right)$ elementárna reflexia?

6. (5.6.9) Nech $U_{m\times r}$ je matica s ortonormálnymi stĺpcami a $V_{k\times n}$ je matica s ortonormálnymi riadkami. Pre ľubovoľnú maticu $A \in M_{r\times k}(\mathbb{C})$ riešte nasledujúce úlohy pre maticové 2-normy a Frobeniove maticové normy:
a) Nájdite hodnoty $\|U\|_2$, $\|V\|_2$, $\|U\|_F$ a $\|V\|_F$.
b) Ukážte, že $\|UAV\|_2 = \|A\|_2$. (*Návod:* Začinte s $\|UA\|_2$.)
c) Ukážte, že $\|UAV\|_F = \|A\|_F$.
Pozn. Tieto vlastnosti noriem platia aj v špeciálnom prípade, keď sú matice U a V unitárne (štvorcové). Preto sú 2-norma a F-norma tzv. *unitárne invariantné maticové normy.*

7. (5.6.14) Nech $R = I - 2uu^*$, kde $u \in \mathbb{R}^n$ s $\|u\| = 1$. Ukážte výpočtom, že ak je x fixným bodom reflexie R (t.j. $Rx = x$), tak x musí byť kolmý na u.

8. (5.6.15) Nech pre $x, y \in \mathbb{R}^n$ platí $\|x\| = \|y\|$, ale $x \neq y$. Vysvetlite ako sa dá skonštruovať elementárna reflexia R spĺňajúca $Rx = y$.
Návod: Pozrite si obrázok 5.6.2 na str. 324 a nájdite vyjadrenie pre vhodný vektor u definujúci reflexiu R.

9. (5.6.16) Nech $x \in \mathbb{R}^n$, resp. $\mathbb{C}^n$, spĺňa $\|x\| = 1$. Uvažujme jeho delenie

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \tilde{x} \end{pmatrix}, \qquad \text{kde } \tilde{x} \in \mathbb{R}^{n-1}, \text{ resp. } \mathbb{C}^{n-1}.$$

a) Ukážte, že ak sú zložky x reálne a $x_1 \neq 1$, potom je

$$P = \begin{pmatrix} x_1 & \tilde{x}^T \\ \tilde{x} & I - \alpha\tilde{x}\tilde{x}^T \end{pmatrix} \qquad \text{pre} \quad \alpha = \frac{1}{1 - x_1}$$

ortogonálna matica.

b) Ukážte, že ak sú zložky x komplexné, $|x_1| \neq 1$ a $\mu = \frac{x_1}{\|x_1\|}$, potom je

$$U = \begin{pmatrix} x_1 & \mu^2\tilde{x}^* \\ \tilde{x} & \mu(I - \alpha\tilde{x}\tilde{x}^*) \end{pmatrix} \qquad \text{pre} \quad \alpha = \frac{1}{1 - \|x_1\|}$$

unitárna matica.

Pozn. Tieto výsledky umožnujú pomerne jednoduché rozšírenie daného jednotkového vektora x na ortonormálnu bázu $\mathbb{R}^n$, resp. $\mathbb{C}^n$.

10. (5.7.2) Predpokladajme, že $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ má hodnosť $h(A) = n$ a P je ortogonálna matica spĺňajúca

$$PA = T = \begin{pmatrix} R_{n\times n} \\ 0 \end{pmatrix},$$

pričom R je horná trojuholníková matica. Ukážte, že ak P^T je rozdelená na bloky

$$P^T = (X_{m\times n} \,|\, Y),$$

potom stĺpce matice X tvoria ortonormálnu bázu $\mathcal{R}(A)$ a $A = XR$ je QR rozklad matice A.

11. (5.7.5) Ukážte, že ak $A = QR$ je QR-rozkladom matice A typu $m \times n$, potom pre Frobeniovu normu platí $\|A\|_F = \|R\|_F$.