Maticový počet – Úloha č. 9

Cvičenia v týždni 25. novembra 2024

Úlohy (strany a číslovanie) sú z knihy Carla D. Meyera *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra.*

1. (5.11.7) Predpokladajme, že $A = URV^T$ je URV-rozklad matice A typu $m \times n$ hodnosti r. Predpokladajme, že U je rozdelená ako $U = (U_1|U_2)$, kde U_1 je typu $m \times r$. Ukážte, že $P = U_1U_1^T$ je matica projekcie na $\mathcal{R}(A)$ v smere $\mathcal{N}(A^T)$. V tomto prípade ide o kolmú projekciu, lebo stĺpcový priestor je kolmý na ľavý nulový. Ako vyzerá matica kolmej projekcie na $\mathcal{N}(A^T)$ v smere $\mathcal{R}(A)$?

2. (5.11.14) Nech A je *normálna* matica, t.j. $A^TA = AA^T$, resp. $A^*A = AA^*$ v komplexnom prípade.
a) Ukážte, že $\mathcal{R}(A - \lambda I) \perp \mathcal{N}(A - \lambda I)$ pre každý skalár λ.
b) Nech λ a μ sú skaláry, pre ktoré sú matice $A - \lambda I$ a $A - \mu I$ singulárne – t.j. *vlastné hodnoty* matice A. Ukážte, že ak $\lambda \neq \mu$, potom $\mathcal{N}(a - \lambda I) \perp \mathcal{N}(A - \mu I)$.

3. (5.12.1) Nájdite SVD-rozklad pre maticu

$$C = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}.$$

4. (5.12.2) Ak sú $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r$ nenulové singulárne hodnoty matice A, potom sa dá ukázať, že funkcia $\nu_k(A) = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_k^2)^{1/2}$ definuje unitárne invariantnú maticovú normu. Vysvetlite prečo sú indukovaná maticová 2-norma a Frobeniova maticová norma extrémnymi prípadmi v zmysle $\|A\|_2^2 = \sigma_1^2$ a $\|A\|_F^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_r^2$.

5. (5.12.3) Každá zo štyroch bežne používaných maticových noriem $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ a $\|\cdot\|_F$ sa dá ohraničiť zhora a zdola konštantným násobkom inej maticovej normy. Teda $\|A\|_i \leq \alpha\|A\|_j$, kde α je zložka na pozícii (i, j) v nasledujúcej matici.

$$\begin{pmatrix} * & \sqrt{n} & n & \sqrt{n} \\ \sqrt{n} & * & \sqrt{n} & 1 \\ n & \sqrt{n} & * & \sqrt{n} \\ \sqrt{n} & \sqrt{n} & \sqrt{n} & * \end{pmatrix}.$$

Pre analýzu limitného správania preto nehrá úlohu ktorá z maticových noriem sa použije; ide o *ekvivalentné maticové normy.* Zdôvodnite, prečo sú členy pre dvojicu $(2, F)$ a $(F, 2)$ v poriadku.

6. (5.12.4) Dokážte, že ak $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r$ sú nenulové singulárne hodnoty matice A hodnosti r a $\|E\|_2 < \sigma_r$, potom $h(A + E) \geq h(A)$.
Pozn: Toto tvrdenie hovorí o tom, pre aké malé perturbácie sa už hodnosť matice nemôže znížiť.

7. (5.12.5) *Obraz jednotkovej sféry.* Rozšírenie výsledku zo str. 414 pre singulárne a obdĺžnikové matice je nasledujúce: Ak $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r$ sú nenulové singulárne hodnoty matice A typu $m \times n$, potom obraz $A(S_2) \subset \mathbb{R}^m$ jednotkovej 2-sféry $S_2 \subset \mathbb{R}^n$ je elipsoid (prípadne degenerovaný – dimenzie r), ktorého k-ta poloos je $\sigma_k U_{*k} = AV_{*k}$, kde U_{*k} a V_{*K} sú príslušné ľavé a pravé singulárne vektory matice A.

8. (5.12.6) Ukážte, že ak je σ_r najmenšia nenulová singulárna hodnota matice $A_{m\times n}$, potom

$$\sigma_r = \min_{\substack{\|x\|_2=1 \\ x\in\mathcal{R}(A^T)}} \|Ax\|_2 = 1/\|A^\dagger\|_2.$$

9. (5.12.8) Ukážte, že pre $|\epsilon| < \sigma_r^2$ ohraničené najmenšou nenulovou singulárnou hodnotou σ_r matice $A_{m\times n}$ existuje matica $(A^TA + \epsilon I)^{-1}$ a $\lim_{\epsilon\to 0}(A^TA + \epsilon I)^{-1}A^T = A^\dagger$.

10. (5.12.15) Predpokladajme, že $A = URV^T$ je URV-rozklad (t.j. môže to byť aj SVD-rozklad) matice A typu $m \times n$ hodnosti r. Predpokladajme, že U je rozdelená ako $U = (U_1|U_2)$, kde U_1 je typu

$m \times r$. Ukážte, že $P = U_1 U_1^T = AA^\dagger$ je matica projekcie na $\mathcal{R}(A)$ v smere $\mathcal{N}(A^T)$. V tomto prípade ide o kolmú projekciu, lebo stĺpcový priestor je kolmý na ľavý nulový. Ako vyzerá matica kolmej projekcie na $\mathcal{N}(A^T)$ v smere $\mathcal{R}(A)$?

11. (5.12.16) Dokážte platnosť nasledujúcich vlastností pseudoinverzie $A^\dagger$.
a) $A^\dagger = A^{-1}$ pre regulárnu (štvorcovú) A.
b) $(A^\dagger)^\dagger = A$.
c) $(A^\dagger)^T = (A^T)^\dagger$.
d) $A^\dagger = \begin{cases} (A^T A)^{-1} A^T & \text{ak } h(A_{m \times n}) = n, \\ A^T (AA^T)^{-1} & \text{ak } h(A_{m \times n}) = m. \end{cases}$
e) $A^T = A^T AA^\dagger = AA^\dagger A^T$ pre všetky $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$.
f) $A^\dagger = A^T (AA^T)^\dagger = (A^T A)^\dagger A^T$ pre všetky $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$.
g) $\mathcal{R}(A^\dagger) = \mathcal{R}(A^T) = \mathcal{R}(A^\dagger A)$ a $\mathcal{N}(A^\dagger) = \mathcal{N}(A^T) = \mathcal{N}(AA^\dagger)$.
h) $(PAQ)^\dagger = Q^T A^\dagger P^T$ ak P a Q sú ortogonálne matice, ale vo všeobecnosti $(AB)^\dagger \neq B^\dagger A^\dagger$.
i) $(A^T A)^\dagger = A^\dagger (A^T)^\dagger$ a $(AA^T)^\dagger = (A^T)^\dagger A^\dagger$.

12. (5.12.18) Nech matice $X, Y \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ spĺňajú $\mathcal{R}(X) \perp \mathcal{R}(Y)$.
a) Dokážte Pytagorovu vetu pre matice vzhľadom na Frobeniovu normu

$$\|X + Y\|_F^2 = \|X\|_F^2 + \|Y\|_2^F.$$

b) Nájdite príklad, v ktorom vzťah z časti a) neplatí pre maticovú 2-normu.
c) Ukážte, že $A^\dagger$ je najbližšou aproximáciou inverznej matice k A v tom zmysle, že $A^\dagger$ je maticou s najmenšou Frobeniovou normou spomedzi tých, ktoré minimalizujú vzdialenosť $\|I - AX\|_F$.