Maticový počet – Úloha č. 11

Cvičenia v týždni 9. decembra 2024

Úlohy (strany a číslovanie) sú z knihy Carla D. Meyera *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra.*

1. (7.2.7) Nech $\{x_1, x_2, \ldots, x_t\}$ je množina lineárne nezávislých vlastných vektorov matice $A_{n\times n}$ prislúchajúcich vlastným hodnotám $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t\}$ a nech X je ľubovoľná $n \times (n-t)$ matica taká, že $P_{n\times n} = (x_1|\ldots|x_t|X)$ je regulárna. Ukážte, že ak P^{-1} má tvar $P^{-1} = \begin{pmatrix} y_1^* \\ \vdots \\ y_t^* \\ Y^* \end{pmatrix}$, kde y_i^* sú riadkové vektory a Y^* je typu $(n-t)\times n$, potom $\{y_1^*, y_2^*, \ldots, y_t^*\}$ sú lineárne nezávislé ľavé vlastné vektory prislúchajúce $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t\}$ – t.j. $y_i^* A = \lambda_i y_i^*$.

2. (7.2.15) Ukážte, že ak $AB = BA$, potom sa matice A a B dajú súčasne previesť na trojuholníkový tvar – t.j. $U^*AU = T_1$ a $U^*BU = T_2$ pre nejakú unitárnu maticu U.
Návod: Pozri 7.1.20 a dôkaz Schurovej lemmy.

3. (7.2.16) Ukážte, že pre diagonalizovateľné matice platí $AB = BA$ práve vtedy, keď sa dajú A a B súčasne diagonalizovať – t.j. $P^{-1}AP = D_1$ a $P^{-1}BP = D_2$ pre nejakú maticu P.
Návod: Ak A a B komutujú, potom komutujú aj $P^{-1}AP = \left(\begin{smallmatrix} \lambda_1 I & 0 \\ 0 & D \end{smallmatrix}\right)$ a $P^{-1}BP = \left(\begin{smallmatrix} W & X \\ Y & Z \end{smallmatrix}\right)$.

4. (7.2.19) Nech $N_{n\times n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.

a) Ukážte, že $\lambda \in \sigma(N + N^T)$ práve vtedy, keď $i\lambda \in \sigma(N - N^T)$.
b) Vysvetlite prečo $N + N^T$ je regulárna práve vtedy, keď je n párne.
c) Nájdite hodnotu podielu $\det(N - N^T)/\det(N + N^T)$ pre párne n.

5. (7.2.20) Toeplitzova matica tvaru

$$C = \begin{pmatrix} c_0 & c_{n-1} & c_{n-2} & \cdots & c_1 \\ c_1 & c_0 & c_{n-1} & \cdots & c_2 \\ c_2 & c_1 & c_0 & \cdots & c_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-1} & c_{n-2} & c_{n-3} & \cdots & c_0 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

sa nazýva *cirkulantná matica.* Ak $p(x) = c_0 + c_1 x + \ldots c_{n-1}x^{n-1}$ a $\left\{1, \xi, \xi^2, \ldots, \xi^{n-1}\right\}$ sú n-té odmocniny z jednotky, potom podľa 5.8.12 platí

$$F_n C F_n^{-1} = \begin{pmatrix} p(1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & p(\xi) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & p(\xi^{n-1}) \end{pmatrix},$$

kde F_n je Fourierova matica rádu n. Overte priamym výpočtom vlastných hodnôt a vlastných vektorov pre cirkulantnú maticu

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. (7.3.6) Vysvetlite prečo platí $\det\left(e^A\right) = e^{\mathrm{Tr}(A)}$.

7. (7.3.9) Vysvetlite prečo $e^{A+B} = e^A e^B$ ak $AB = BA$. Nájdite príklad, kde sa e^{A+B}, $e^A e^B$ a $e^B e^A$ navzájom líšia ak $AB \neq BA$.
Návod: Cvičenie 7.2.16 pre diagonalizovateľný prípad; vo všeobecnosti sa pozrite na $F(t) = e^{(A+B)t} - e^{(At)}e^{(Bt)}$ a $F'(t)$.

8. (7.3.10) Ukážte, že e^A je ortogonálna matica, ak A je reálna antisymetrická.

9. (7.3.12) *Spektrálny polomer* matice A je $\rho(A) = \max_{\lambda_i \in \sigma(A)} |\lambda_i|$. Ukážte, že ak je A diagonalizovateľná, potom

$$\rho(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n} \qquad \text{pre každú maticovú normu.}$$

Tento výsledok platí tiež aj pre nediagonalizovateľné matice, ale dôkaz je komplikovanejší (pozri Príklad 7.10.1, str. 619).

10. (7.4.1) Predpokladajme, že $A_{n\times n}$ je diagonalizovateľná a $P = (x_1|x_2|\ldots|x_n)$ je matica, ktorej stĺpce tvoria úplnú sadu lineárne nezávislých vektorov zodpovedajúcich vlstným hodnotám, λ_i. Ukážte, že riešenie systému $u' = Au$, $u(0) = c$ sa dá napísať ako

$$u(t) = \xi_1 e^{\lambda_1 t} x_1 + \xi_2 e^{\lambda_2 t} x_2 + \cdots + \xi_n e^{\lambda_n t} x_n,$$

kde koeficienty ξ_i získame ako riešenie systému $P\xi = c$.

11. (7.5.3) Ukážte, že $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ je normálna a má reálne vlastné hodnoty práve vtedy, keď je A symetrická.

12. (7.5.4) Ukážte, že vlastné hodnoty reálnej antisymetrickej alebo antihermitovskej matice musia byť rýdzo imaginárne čísla (t.j. reálne násobky i).

13. (7.5.10) Ukážte, že pre normálnu maticu A je (λ, x) pár vlastná hodnota – vlastný vektor práve vtedy, keď je $(\bar{\lambda}, x)$ takým párom pre maticu A^*.