

Úvod:

- kontakty
- sylabus
- knihy
- web-stránka kurzu, Google Classroom
- domáce úlohy, hodnotenie
- prerekvizity (zhrnutie LAG I a LAG II)
- alternatíva: 1–PMA–215 Maticová algebra pre štatistikov

Aplikácie LinAlg v praxi (Kapitola 1.4):

- vývoj dostupnej výpočtovej kapacity
- typy veľkých a ťažkých výpočtov v aplikovanej matematike v jednotlivých obdobiach
- ako počítať? (existencia algoritmov)
- ako počítať presne? (analýza typu chýb, ich veľkostí a ich postupného “nabaľovania”, stabilita algoritmu)
- ako počítať rýchlo? (počet operácií, zjednodušenie algoritmov, úpravy dát, konvergencia výpočtu, triky, paralelizácia a pod.)
- príklady: počítanie meteorologických modelov (PDR), dynamika objektov v slnečnej sústave – gravitational slingshot (ODR)
- súvis PageRank (Google) so spektrálnou teóriou nezáporných matic (Perron – Frobenius)
- ODR a PDR  $\rightarrow$  nasekanie intervalu/domény, aproximácie derivácií  $\rightarrow$  lineárne systémy s veľkými a riedkymi maticami

Presnosť výpočtov, aritmetika pohyblivej čiarky (Kapitola 1.5):

**Čísla s pohyblivou čiarkou**

Pod  $t$ -číslicovým číslom v aritmetike *pohyblivej rádovej čiarky* so základom  $\beta$  rozumieme

$$f = \pm d_1 d_2 \dots d_t \times \beta^\epsilon, \quad \text{pričom} \quad d_1 \neq 0.$$

Základ (alebo báza)  $\beta$ , *exponent*  $L \leq \epsilon \leq U$  a číslice (cifry)  $0 \leq d_i \leq \beta - 1$  sú celé čísla. V elektronických zariadeniach sa spravidla používa  $\beta = 2$  (binárna reprezentácia), pre výpočty s ceruzkou/kriedou na papieri/tabuli je ľudskejšie používať  $\beta = 10$ . Hodnota  $t$  sa nazýva *presnosť*, povolené hranice (dolná  $L$ /horná  $U$ ) pre exponent  $\epsilon$  môžu závisieť od voľby hardvéru, softvéru, konvencie, technického štandardu a pod.

- zvláštnosti počítania vo floating point aritmetike (nie je distributívne ani asociatívne – na poradí operácií záleží)
- príklad rôzneho priebehu eliminácie v presnej a 3-číslicovej aritmetike

### Čiastočné pivotovanie

V každom kroku eliminácie hľadať zložku na a pod pozíciou pivota s najväčšou veľkosťou. Ak je to potrebné, vykonať príslušnú výmenu riadkov a dostať tento maximálny koeficient na pozíciu pivota. Ilustrácia tretieho kroku eliminácie s čiastočným pivotovaním v typickom prípade:

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \textcircled{s} & * & * & * \\ 0 & 0 & s & * & * & * \\ 0 & 0 & s & * & * & * \end{array} \right).$$

Prehľadať pozície v treťom stĺpci označené písmenom  $s$  a nájsť koeficient s najväčšou absolútnou hodnotou. Ak je to potrebné, vymeniť riadky tak, aby sa tento koeficient ocitol na zakrúžkovanej pozícii tretieho pivota. Zjednodušene povedané, stratégia je maximalizovať veľkosť pivotov v každom kroku iba za použitia riadkových výmen.

- príklad rôzneho priebehu eliminácie v 3-číslícovej aritmetike s pivotovaním a bez pivotovania

### Praktická stratégia pre škálovanie

- Zvoliť jednotky (zodpovedajúce stĺpcom), ktoré sú prirodzené pre daný problém a nedeformovať vzťahy medzi “veľkosťou” vecí. Tieto prirodzené jednotky bývajú spravidla zjavné a ďalšie škálovanie stĺpcov sa spravidla nerobí.
- Riadky systému  $(A|b)$  škálovať tak, aby koeficient s najväčšou veľkosťou v každom riadku matice  $A$  bol rovný 1. T.j. predeliť každú z rovníc koeficientom s najväčšou veľkosťou.

Čiastočné pivotovanie s takto zvolenou škálovacou stratégiou robí z Gaussovej eliminácie (spolu so spätnou substitúciou) extrémne efektívny nástroj. V priebehu času sa táto technika ukázala byť spoľahlivou pre riešenie väčšiny lineárnych systémov, ktoré priniesla prax.

### Kompletné pivotovanie

V  $k$ -tom kroku Gaussovej eliminácie sa v rozšírenej matici systému  $(A|b)$  nájde koeficient s najväčšou veľkosťou na pozícii pivota, ako aj na všetkých pozíciách v  $A$ , ktoré sa nachádzajú nad alebo napravo od nej. Ak je to nutné, vykoná sa príslušná výmena riadkov (rovníc) a stĺpcov (permutovanie neznámych) tak, aby sa najväčší koeficient ocitol na pozícii pivota. Ilustrácia tretieho kroku eliminácie s kompletným pivotovaním v typickom prípade:

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \textcircled{s} & s & s & * \\ 0 & 0 & s & s & s & * \\ 0 & 0 & s & s & s & * \end{array} \right).$$

Prehľadať pozície označené “ $s$ ” a nájsť koeficient s najväčšou absolútnou hodnotou. Ak je to potrebné, vymeniť riadky a stĺpce tak, aby sa tento koeficient ocitol na zakrúžkovanej pozícii tretieho pivota. Poznámka: výmena stĺpcov  $A$  zodpovedá permutácii (alebo premenovaniu) príslušných neznámych.

- kompletné pivotovanie je aspoň tak dobré ako čiastočné pivotovanie
- pre príklad, kde úplné pivotovanie vyhráva, pozri príklad č. 6 z DÚ 1

Zle podmienené systémy (Kapitola 1.6):

- Príklad zle podmieneného systému, geometrické vysvetlenie.

### Zle podmienené lineárne systémy

Systém lineárnych rovníc sa nazýva *zle podmienený*, ak malá perturbácia systému vedie k relatívne veľkej zmene v presnom riešení. Inak sa systém nazýva *dobře podmienený*.

- Geometria – zmena polohy priesečníka skoro rovnobežných priamok pri ich malom posunutí.
- Algebra – skoro singulárna matica  $A$ ,  $A^{-1}$  “naťahuje” malý vektor  $b - \hat{b}$  na veľký vektor  $x - \hat{x}$ .
- Prejavy: veľké zložky v  $A^{-1}$ , resp. veľké vlastné/singulárne hodnoty  $A^{-1}$ .
- Potreba identifikovať a vyhnúť sa zle podmieneným systémom v praxi.
- *Rezíduá (resp. reziduálne vektory)*: pre nepresné riešenie  $x_c = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  vyhodnotiť veľkosť výrazov  $r_i = a_{i1}\xi_1 + a_{i2}\xi_2 + \dots + a_{in}\xi_n - b_i$ . Maticovo:  $r = Ax_c - b$ .
- Pre dobre podmienené systémy sú rezíduá užitočné, pre zle podmienené ani veľmi nie.

Inverzné matice súčtu a citlivosť na perturbácie (Kapitola 3.8):

- Zovšeobecnenie formuly pre  $(I + cd^T)^{-1}$ .

### Sherman-Morrisonova formula

- Ak  $A_{n \times n}$  je regulárna a ak  $c$  a  $d$  sú  $n \times 1$  stĺpcové vektory spĺňajúce  $1 + d^T A^{-1} c \neq 0$ , potom je  $A + cd^T$  regulárna a

$$(A + cd^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}cd^T A^{-1}}{1 + d^T A^{-1}c}.$$

- Zovšeobecnením je *Sherman-Morrison-Woodburyho* formula. Ak  $C$  a  $D$  sú typu  $n \times k$  také, že  $(I + D^T A^{-1} C)^{-1}$  existuje, potom

$$(A + CD^T)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}C(I + D^T A^{-1}C)^{-1}D^T A^{-1}.$$

- Aplikácia S-M formuly pre výpočet inverzu aktualizovanej matice (pozmenená jedna zložka).

### Neumannov rad

Ak je  $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = 0$ , potom je  $I - A$  regulárna a platí

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} A^k.$$

Takýto nekonečný rad sa nazýva *Neumannov rad*; poskytuje aproximácie pre  $(I - A)^{-1}$  ak má matica  $A$  zložky malej veľkosti. Napr. pre priblíženie prvého rádu máme  $(I - A)^{-1} \approx I + A$ .

- Odvodenie približnej rovnosti  $(A + B)^{-1} \approx A^{-1} - A^{-1}BA^{-1}$ , ak  $\|A\| \gg \|B\|$ .
- Potreba zavedenia maticovej normy (zide sa hlavne vzťah  $\|XY\| \leq \|X\|\|Y\|$ ).
- Odvodenie (približných) ohraničení

$$\frac{\|A^{-1} - (A + B)^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} \lesssim \|A^{-1}\| \|A\| \left( \frac{\|B\|}{\|A\|} \right),$$

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \lesssim \|A^{-1}\| \|A\| \left( \frac{\|B\|}{\|A\|} \right).$$

### Citlivosť a podmienenosť

- Regulárna matica  $A$  sa nazýva *zle podmienená*, ak malá relatívna zmena v  $A$  vedie k veľkej relatívnej zmene v  $A^{-1}$ . Miera zlej podmienenosti je udaná *čísлом podmienenosti*  $\kappa = \|A\| \|A^{-1}\|$ , kde  $\|\cdot\|$  je (niektorá) maticová norma.
- Citlivosť riešenia systému  $Ax = b$  vzhľadom na perturbácie (alebo chyby) v  $A$  zodpovedá tomu, ako je  $A$  zle podmienená.

- Pre  $t$ -číslicovú aritmetiku a  $\kappa$  rádu  $p$  je riešenie  $Ax = b$  presné na cca.  $t - p$  číslic.
- *Otázka:* ako zistiť podmienenosť matice bez výpočtu  $A^{-1}$ ? *Odpoveď:* SVD – singulárny rozklad

$LU$  rozklad (Kapitola 3.10):

- Tri typy elementárnych riadkových operácií a ich realizácia ako ľavé násobenie elementárnou maticou.
- Gaussova eliminácia bez výmeny riadkov (iba operácie typu III)  $\rightarrow LU$  rozklad.
- Zložky matice  $L$  vyzerajú zaujímavo ...
- *Elementárne dolné trojuholníkové* matice  $T_k = I - c_k e_k^T$  pre  $c_k = (0, \dots, 0, \mu_{k+1}, \dots, \mu_n)^T$ ,

$$T_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -\mu_{k+1} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\mu_n & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Inverz:

$$T_k^{-1} = I + c_k e_k^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \mu_{k+1} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_n & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

- Vyjadrenie  $L = T_1^{-1} T_2^{-1} \dots T_{k-1}^{-1} = I + c_1 e_1^T + c_2 e_2^T + \dots + c_{k-1} e_{k-1}^T$ .

### $LU$ rozklad

Ak sa počas Gaussovej eliminácie  $n \times n$  matice  $A$  operáciami typu III nevyskytne na diagonálnej pozícii pivota nula, potom sa  $A$  dá vyjariť ako súčin  $A = LU$  a platí:

- $L$  je dolná trojuholníková a  $U$  je horná trojuholníková.
- Pre diagonálne zložky platí  $l_{ii} = 1$  a  $u_{ii} \neq 0$  pre  $i = 1, 2, \dots, n$ .
- Zložka  $l_{ij}$  pod diagonálou matice  $L$  zodpovedá násobku riadku  $j$ , ktorý bol odpočítaný od riadku  $i$  pri nulovaní pozície  $(i, j)$  počas eliminácie.
- $U$  je konečný výsledok Gaussovej eliminácie použitej na maticu  $A$ .
- Matice  $L$  a  $U$  sú jednoznačne určené prvými dvoma vlastnosťami (trojuholníkové matice, jednotky na diagonále v  $L$ ).

Rozklad matice  $A$  na súčin  $A = LU$  sa nazýva  *$LU$  rozklad matice  $A$* . Matice  $L$  a  $U$  sa nazývajú  *$LU$  faktory pre  $A$* .

- Dôkaz jednoznačnosti  $LU$  rozkladu ( $L_2^{-1} L_1 = U_2 U_1^{-1}$  musí byť diagonálna, resp. identita).
- Využitie pamäte pri výpočte  $LU$  rozkladu.

### Riešenie systému pomocou $LU$ rozkladu

- Na vyriešenie regulárneho systému  $Ax = b$  pomocou  $LU$  rozkladu  $A = LU$  je potrebné najprv riešiť doprednou substitúciou (dolný) trojuholníkový systém  $Ly = b$  pre neznámu  $y$ , a potom riešiť (horný) trojuholníkový systém  $Ux = y$  spätnou substitúciou.
- Výhodou tohto prístupu je to, že ak sú  $LU$  faktory pre maticu  $A$  známe, ľubovoľný systém  $Ax = \tilde{b}$  sa dá riešiť pomocou  $n^2$  násobení/delení a  $n^2 - n$  sčítaní/odčítaní.

- Porovnanie: na výpočet  $x = A^{-1}b$  treba tiež  $n^2$  násobení/delení a  $n^2 - n$  sčítaní/odčítaní.
- Existencia  $LU$  rozkladu a potreba výmeny riadkov počas eliminácie.

### Existencia $LU$ faktorov

Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné tomu, že pre regulárnu  $n \times n$  maticu  $A$  existuje  $LU$  rozklad.

- Počas Gaussovej eliminácie na horný trojuholníkový tvar iba pomocou operácií typu III sa na diagonále neobjavia nulové pivoty.
- Každá hlavná podmatica  $A_k$  matice  $A$  je regulárna.

- Blokový rozklad ľavej hornej  $(k+1) \times (k+1)$  podmatice

$$A_{k+1} = \begin{pmatrix} A_k & b \\ c^T & \alpha_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_k & 0 \\ c^T U_k^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_k & L_k^{-1}b \\ 0 & \alpha_{k+1} - c^T A_k^{-1}b \end{pmatrix}.$$

$PA = LU$  – viac detailov v knihe (Kapitola 3.10, strany 150 - 153):

- Ako postupovať keď je nevyhnutná výmena riadkov (nulové pivoty, resp. potreba čiastočného pivotovania)?  $PA = LU$
- výmena riadkov (s poradím  $i, j > k$ ) a elementárne dolné trojuholníkové matice

$$P_{ij}T_k \dots T_2T_1 = \tilde{T}_k \dots \tilde{T}_2\tilde{T}_1P_{ij},$$

kde  $T_i = I - c_k e_k^T$  a  $\tilde{T}_i = I - \tilde{c}_k e_k^T$ , resp.  $\tilde{T}_i^{-1} = I + \tilde{c}_k e_k^T$ , pričom  $\tilde{c}_k = P_{ij}c_k$ . To znamená, že v  $LU$  rozklade matice  $PA$  vychádzajú tie isté koeficienty, len sú v inom poradí – permutované maticou  $P$ .

### $LU$ rozklad s výmenou riadkov (prax)

- Pre každú regulárnu maticu  $A$  existuje permutačná matica  $P$  taká, že matica  $PA$  má  $LU$  rozklad  $PA = LU$ .
- Pre výpočet  $L$ ,  $U$  a  $P$  postupne prepisujeme tabuľku obsahujúcu zložky matice  $A$  nasledovne: každá zložka, ktorá sa nuluje, je nahradená násobkom, ktorý bol na toto nulovanie použitý (t.j.  $a_{ij} \mapsto l_{ij}$  pre zložky pod diagonálou). Ak sa použije výmena riadkov (napr. pri čiastočnom pivotovaní), násobky sa vymenia korektným spôsobom.
- Zvyčajne sa nevyžaduje pamätať si celú permutačnú maticu  $P$ , ale ak to je potrebné, dá sa získať z matice  $I$  postupnou výmenou tých riadkov, ktoré sa vymieňajú počas eliminácie. Namiesto  $n \times n$  matice spravidla stačí ukladať “stĺpec počítania permutácií”  $p$ , v ktorom sa začína so zložkami zoradenými v štandardnom poradí  $(1, 2, \dots, n)^T$  a postupne sa vykonávajú príslušné výmeny.
- Na vyriešenie regulárneho systému  $Ax = b$  pomocou  $LU$  rozkladu s čiastočným pivotovaním je potrebné permutovať zložky  $b$  na  $\tilde{b}$  tak, aby zodpovedali vykonaným výmenám riadkov – t.j. podľa  $p$  – a potom riešiť doprednú substitúciou systém  $Ly = \tilde{b}$  a následne riešiť systém  $Ux = y$  spätnou substitúciou.

- $LDU$  rozklad ako (symetrické) vylepšenie  $LU$  rozkladu. Tiež jednoznačný.
- Pre symetrickú maticu ( $A = A^T$ ) máme  $A = LDL^T$ .
- Pre kladne definitnú symetrickú máme  $A = LD^{1/2}D^{1/2}L^T = R^TR$ , kde  $R = D^{1/2}L^T$  je horná trojuholníková s kladnou diagonálou – *Choleského rozklad*; viac pri  $QR$  rozklade.

Štyri základné priestory a ich vlastnosti (Kapitoly 4.2, 4.4, 4.5):

- Opakovanie: Stĺpcový, nulový, riadkový a ľavý nulový priestor:
  - stĺpcový priestor  $\mathcal{R}(A) = \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^m$ .
  - riadkový priestor  $\mathcal{R}(A^T) = \{A^T y \mid y \in \mathbb{R}^m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ .
  - nulový priestor  $\mathcal{N}(A) = \{x \mid Ax = 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$ .
  - ľavý nulový priestor  $\mathcal{N}(A^T) = \{y \mid A^T y = 0\} \subseteq \mathbb{R}^m$ .
- Dimenzie:  $\dim \mathcal{R}(A) = \dim \mathcal{R}(A^T) = r$ ,  $\dim \mathcal{N}(A) = n - r$  a  $\dim \mathcal{N}(A^T) = m - r$ .
- Kolmost':  $\mathcal{R}(A^T) \perp \mathcal{N}(A)$  a  $\mathcal{R}(A) \perp \mathcal{N}(A^T)$ .
- Riešiteľnosť:  $Ax = b$  má klasické riešenie  $\iff b \in \mathcal{R}(A) \iff b \perp \mathcal{N}(A^T)$ .
- Inklúzie:  $\mathcal{N}(BA) \supseteq \mathcal{N}(A)$  a  $\mathcal{R}(BA) \subseteq \mathcal{R}(B)$ .

### Súčiny $A^T A$ a $AA^T$

Pre  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  platí:

- $h(A^T A) = h(A) = h(AA^T)$ .
- $\mathcal{R}(A^T A) = \mathcal{R}(A^T)$  a  $\mathcal{R}(AA^T) = \mathcal{R}(A)$ .
- $\mathcal{N}(A^T A) = \mathcal{N}(A)$  a  $\mathcal{N}(AA^T) = \mathcal{N}(A^T)$ .

Pre komplexné matice  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$  sa musí operácia transpozície  $(\cdot)^T$  nahradiť hermitovským združením  $(\cdot)^*$ .

- Dôkaz využíva kladnú definitnosť:  $\langle Ax \mid Ax \rangle = x^T A^T A x = 0 \iff Ax = 0 \iff x \in \mathcal{N}(A)$ .

### Normálne rovnice

- Systému  $Ax = b$  typu  $m \times n$  zodpovedá  $n \times n$  systém *normálnych rovníc*  $A^T Ax = A^T b$ .
- Systém  $A^T Ax = A^T b$  je vždy konzistentný, a to aj v prípade, ak  $Ax = b$  nie je.
- Ak je systém  $Ax = b$  konzistentný, množina jeho riešení sa zhoduje s množinou riešení systému  $A^T Ax = A^T b$ . Vo všeobecnosti, keď je  $Ax = b$  nekonzistentný, riešenia normálnych rovníc zodpovedajú *riešeniam  $Ax = b$  v najmenších štvorcach*.
- $A^T Ax = A^T b$  má jednoznačné riešenie práve vtedy, keď  $h(A) = n$  a vtedy sa toto riešenie dá vyjadriť ako  $x = (A^T A)^{-1} A^T b$ .
- Ak je  $Ax = b$  konzistentný a má jednoznačné riešenie, tak to platí aj pre  $A^T Ax = A^T b$  a jednoznačné riešenie oboch systémov je  $x = (A^T A)^{-1} A^T b$ .

- Podmienenosť  $\kappa_{A^T A} \approx (\kappa_A)^2 \rightarrow$  vyhnúť sa normálnym rovniciam pri numerických výpočtoch.
- Legendre, Gauss a (znovu)objavenie Ceres pomocou najmenších štvorcov ...

Najmenšie štvorce – klasický pohľad (Kapitola 4.6):

- Lineárna regresia dát  $\mathcal{D} = \{(t_1, b_1), (t_2, b_2), \dots, (t_m, b_m)\}$  ako príklad použitia metódy najmenších štvorcov pre “preurčený” (overdetermined)  $m \times 2$  systém  $Ax = b$  pre

$$x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_m \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

- *Chybový vektor*  $\varepsilon = Ax - b$ .
- Minimalizácia  $\|\varepsilon\|^2 = \varepsilon^T \varepsilon = (Ax - b)^T (Ax - b) \rightarrow$  riešenie normálneho systému  $A^T Ax = A^T b$ .
- Najmenšie štvorce – klasický pohľad:
- Minimalizácia chyby  $f(x) = (Ax - b)^T (Ax - b)$  pre  $x \in \mathbb{R}^n$ .
- Nutná podmienka minima:  $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} (x^T A^T Ax - 2x^T A^T b + b^T b) = e_i^T A^T Ax + x^T A^T A e_i - 2e_i^T A^T b = 0 \rightarrow$  normálny systém  $A^T Ax = A^T b$ .
- Ak  $z$  rieši  $A^T Az = A^T b$  a  $y = z + u$ , potom  $f(y) = f(z) + \|Au\|^2 \geq f(z) \rightarrow$  v  $z + \mathcal{N}(A)$  sa nadobúda globálne minimum  $f$ .

### Všeobecný problém najmenších štvorcov

Pre  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  a  $b \in \mathbb{R}^m$  označme  $\varepsilon = \varepsilon(x) = Ax - b$ . Všeobecný problém najmenších štvorcov je nájsť vektor  $x \in \mathbb{R}^n$ , ktorý minimalizuje hodnotu

$$\sum_{i=1}^m \varepsilon_i^2 = \varepsilon^T \varepsilon = (Ax - b)^T (Ax - b).$$

Ľubovoľný vektor, v ktorom sa takéto minimum nadobúda sa nazýva *riešením*  $Ax = b$  v najmenších štvorcach.

- Množina riešení v najmenších štvorcach je rovnaká ako množina riešení systému normálnych rovníc  $A^T Ax = A^T b$ .
- Riešenie v najmenších štvorcach je jednoznačné práve vtedy, keď  $h(A) = n$  a v tom prípade je dané ako  $x = (A^T A)^{-1} A^T b$ .
- Ak je  $Ax = b$  konzistentný, potom je množina riešení  $Ax = b$  rovnaká ako množina riešení v najmenších štvorcach.

Komplementárne podpriestory – šikmé projekcie (Kapitola 5.9):

### Komplementárne podpriestory

Podpriestory  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  priestoru  $\mathcal{V}$  sa nazývajú *komplementárne*, ak

$$\mathcal{V} = \mathcal{X} + \mathcal{Y} \quad \text{a} \quad \mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = \{\vec{0}\}.$$

V tom prípade sa  $\mathcal{V}$  nazýva *priamy súčet*  $\mathcal{X}$  a  $\mathcal{Y}$ ; značenie  $\mathcal{V} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$ .

Pre vektorový priestor  $\mathcal{V}$  a jeho podpriestory  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  s bázami  $\mathcal{B}_\mathcal{X}$  a  $\mathcal{B}_\mathcal{Y}$  sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné

- $\mathcal{V} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$ .
- Pre každé  $v \in \mathcal{V}$  existuje jediná dvojica vektorov  $x \in \mathcal{X}$  a  $y \in \mathcal{Y}$  spĺňajúca  $v = x + y$ .
- $\mathcal{B}_\mathcal{X} \cap \mathcal{B}_\mathcal{Y} = \emptyset$  a  $\mathcal{B}_\mathcal{X} \cup \mathcal{B}_\mathcal{Y}$  je báza  $\mathcal{V}$ .



## Projekcie

Nech  $\mathcal{V} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$ , teda pre každý vektor  $v \in \mathcal{V}$  existujú jednoznačné vektory  $x \in \mathcal{X}$  a  $y \in \mathcal{Y}$  spĺňajúce  $v = x + y$ .

- Vektor  $x$  sa nazýva projekcia  $v$  na  $\mathcal{X}$  v smere (pozdĺž) podpriestoru  $\mathcal{Y}$ .
- Vektor  $y$  sa nazýva projekcia  $v$  na  $\mathcal{Y}$  v smere (pozdĺž) podpriestoru  $\mathcal{X}$ .

- Jednoznačný rozklad  $v = x + y$  pre  $x \in \mathcal{X}$  a  $y \in \mathcal{Y}$  určuje lineárny operátor  $P$  daný predpisom  $Pv = x$ . Nazýva sa *projektor na  $\mathcal{X}$  v smere  $\mathcal{Y}$* .
- Ak  $(V) = \mathbb{R}^n$  alebo  $\mathbb{C}^n$ , potom  $P$  sa dá maticovo vyjadriť ako

$$P = (X|0)(X|Y)^{-1} = (X|Y) \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (X|Y)^{-1},$$

kde stĺpce  $X_{n \times r}$  a  $Y_{n \times n-r}$  tvoria bázy  $\mathcal{X}$  a  $\mathcal{Y}$ .

- Matica  $P$  je podobná diagonálnej s  $r$  jednotkami a  $n - r$  nulami na diagonále.
- Projektor na  $\mathcal{X}$  v smere  $\mathcal{Y}$  spĺňa  $P^2 = P$  ( $P$  je idempotentný).
- Súvis rovnice  $P^2 = P$  s vlastnými hodnotami ( $\lambda^2 = \lambda$ ).

Komplementárne podpriestory – šikmé projekcie – pokračovanie (Kapitola 5.9):

**Projekčné operátory**

Nech  $\mathcal{X}$  a  $\mathcal{Y}$  sú komplementárne podpriestory priestoru  $\mathcal{V}$ , t.j. každé  $v \in \mathcal{V}$  sa dá jednoznačne rozložiť ako  $v = x + y$  pre  $x \in \mathcal{X}$  a  $y \in \mathcal{Y}$ . Jednoznačne daný lineárny operátor  $P$  daný predpisom  $Pv = x$  sa nazýva *projektor na  $\mathcal{X}$  v smere  $\mathcal{Y}$*  a platí preň:

- $P^2 = P$  ( $P$  je idempotentný).
- $I - P$  je komplementárny projektor na  $\mathcal{Y}$  v smere  $\mathcal{X}$ .
- $\mathcal{R}(P) = \{x \mid Px = x\}$  (množina fixných bodov  $P$ )
- $\mathcal{R}(P) = \mathcal{N}(I - P) = \mathcal{X}$  a  $\mathcal{R}(I - P) = \mathcal{N}(P) = \mathcal{Y}$ .
- Ak  $(V) = \mathbb{R}^n$  alebo  $\mathbb{C}^n$ , potom  $P$  sa dá maticovo vyjadriť ako

$$P = (X|0)(X|Y)^{-1} = (X|Y) \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (X|Y)^{-1}$$

a komplementárny projektor  $Q$  ako

$$Q = I - P = (0|Y)(X|Y)^{-1} = (X|Y) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix} (X|Y)^{-1},$$

kde stĺpce  $X_{n \times r}$  a  $Y_{n \times n-r}$  tvoria bázy  $\mathcal{X}$  a  $\mathcal{Y}$ .

**Projekcie a idempotentné zobrazenia**

Lineárny operátor  $P$  na vektorovom priestore  $\mathcal{V}$  je projekčný operátor práve vtedy, keď  $P^2 = P$ .

- súvis rovnice  $P^2 = P$  s vlastnými hodnotami ( $\lambda^2 = \lambda$ )
- geometrický argument pre diagonalizáciu  $P$  – priestory  $\mathcal{X}$  a  $\mathcal{Y}$  sú *vlastné priestory*

$$\mathcal{R}(P) = \mathcal{X} = \{x \mid Px = 1 \cdot x\} = V_1$$

$$\mathcal{N}(P) = \mathcal{Y} = \{y \mid Py = 0 \cdot y\} = V_0$$

- ak  $P^2 = P$ , tak *minimálny polynóm* matice  $P$  je buď  $m_P(x) = x(x-1)$  alebo  $P = I$  alebo  $P = 0$ .
- tvar minimálneho polynómu  $m_P$  dá bloky  $1 \times 1$  v Jordanovom tvare

Kolmé projekcie (Kapitola 5.13):

**Kolmé (ortogonálne) projekcie**

Pre  $v \in \mathcal{V}$  majme rozklad  $v = m + n$ , pričom  $m \in \mathcal{M}$  a  $n \in \mathcal{M}^\perp$ .

- Vektor  $m$  sa nazýva *kolmá (ortogonálna) projekcia  $v$  na  $\mathcal{M}$* .
- Projekčný operátor  $P_{\mathcal{M}}$  na  $\mathcal{M}$  v smere  $\mathcal{M}^\perp$  sa nazýva *ortogonálny projektor na  $\mathcal{M}$* .
- $P_{\mathcal{M}}$  je (jediný) lineárny operátor spĺňajúci  $P_{\mathcal{M}}v = m$ .

- Ak stĺpce  $M_{n \times r}$  tvoria bázu  $\mathcal{M}$  a stĺpce  $N_{n \times n-r}$  tvoria ortonormálnu bázu  $\mathcal{M}^\perp$ , potom

$$N^T M = 0, \quad M^T N = 0, \quad N^T N = I_{n-r} \quad \text{a} \quad (M|N)^{-1} = \begin{pmatrix} (M^T M)^{-1} M^T \\ N^T \end{pmatrix}.$$

### Konstruktívne matíc kolmej projekcie

Nech  $\mathcal{M}$  je  $r$ -rozmerný podpriestor  $\mathbb{R}^n$  a stĺpce  $M_{n \times r}$ ,  $N_{n \times n-r}$  tvoria bázy  $\mathcal{M}$ , resp.  $\mathcal{M}^\perp$ . Ortogonálne projektor na  $\mathcal{M}$  a  $\mathcal{M}^\perp$  sú

- $P_{\mathcal{M}} = M(M^T M)^{-1} M^T$  a  $P_{\mathcal{M}^\perp} = N(N^T N)^{-1} N^T$ ;
- navyše platí  $P_{\mathcal{M}^\perp} = I - P_{\mathcal{M}}$ .

Ak sú stĺpce matíc  $M$  a  $N$  *ortonormálne*, potom

- $P_{\mathcal{M}} = M M^T$  a  $P_{\mathcal{M}^\perp} = N N^T$ .
- $P_{\mathcal{M}} = U \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^T$ , pre ortogonálnu maticu  $U = (M|N)$ .

### Charakterizácia projekčných matíc

Nech  $P \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  je matica projekčného operátora, t.j.  $P^2 = P$ . Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné tomu, že  $P$  je matica *kolmej* projekcie:

- $\mathcal{R}(P) \perp \mathcal{N}(P)$ .
- $P = P^T$  (t.j.  $P$  reprezentuje kolmú projekciu  $\iff P P^T = P^2 = P = P^T$ ).
- $\|P\|_2 = 1$  pre maticovú 2-normu. (*toto sme neukázali*)

### Najbližší bod podpriestoru

Nech  $\mathcal{M}$  je podpriestor euklidovského vektorového priestoru  $\mathcal{V}$  a  $b$  je vektor (bod) vo  $\mathcal{V}$ . Potom v  $\mathcal{M}$  existuje jediný najbližší vektor (bod)  $p$  k  $b$  a je to práve kolmá projekcia  $p = P_{\mathcal{M}} b$ . Teda

$$\min_{m \in \mathcal{M}} \|b - m\| = \|b - P_{\mathcal{M}} b\| = \text{dist}(b, \mathcal{M}).$$

Táto vzdialenosť sa nazýva *kolmou vzdialenosťou* medzi  $b$  a  $\mathcal{M}$ .

- Problém najmenších štvorcov – minimalizácia  $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|^2$  ako minimalizácia vzdialenosti  $\min_{m \in \mathcal{R}(A)} \|b - m\|$ , resp. hľadanie projekcie  $P_{\mathcal{R}(A)} b$ .
- $Ax = P_{\mathcal{R}(A)} b \iff A^T Ax = A^T b$  (normálne rovnice).

### Riešenie v najmenších štvorcach

Nasledujúce štyri tvrdenia sú ekvivalentné tomu, že  $\hat{x}$  je riešením systému  $Ax = b$  v najmenších štvorcach:

- $\|A\hat{x} - b\| = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|$ .
- $A\hat{x} = P_{\mathcal{R}(A)} b$ .
- $A^T A\hat{x} = A^T b$  (resp.  $A^* A\hat{x} = A^* b$  ak  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ ).
- $\hat{x} \in A^\dagger b + \mathcal{N}(A)$  ( $A^\dagger b$  je riešením v najmenších štvorcach s najmenšou 2-normou).

*Pozor!* Tento popis je významný z pohľadu teórie, ale v aritmetike pohyblivej čiarky zvyknú byť výpočty nestabilné (podmienenosť:  $\kappa_{A^T A} \gg \kappa_A$ ; výpočet  $A^\dagger$  môže byť numericky nestabilný).

Kolmé projekcie – dokončenie (Kapitola 5.13):

- Pre  $a \neq \vec{0} \in \mathbb{R}^n$  je ortogonálny projektor na priamku  $\mathcal{L} = \text{span}(a)$ :

$$P_{\mathcal{L}} = a (a^T a)^{-1} a^T = \frac{a a^T}{a^T a}.$$

- Ak  $\|a\| = 1$ , tak  $P_{\mathcal{L}} = a a^T$  a  $P_{\mathcal{L}}(x) = \langle a | x \rangle a$ .

Gram-Schmidtov proces (Kapitola 5.5):

### Gram-Schmidtov ortogonalizačný proces

Ak  $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  je báza vektorového priestoru  $\mathcal{S}$  so skalárnym súčinom, potom *Gram-Schmidtova postupnosť* definovaná ako

$$u_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|} \quad \text{a} \quad u_k = \frac{x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle u_i | x_k \rangle u_i}{\left\| x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle u_i | x_k \rangle u_i \right\|} \quad \text{pre} \quad k = 2, \dots, n$$

tvorí ortonormálnu bázu  $\mathcal{S}$ .

Ak  $\mathcal{S}$  je  $n$ -rozmerný podpriestor priestoru  $\mathbb{C}^m$ , Gram-Schmidtova postupnosť sa dá vyjadriť maticovo ako

$$u_{k+1} = \frac{(I - U_k U_k^*) x_{k+1}}{\|(I - U_k U_k^*) x_{k+1}\|} \quad \text{pre} \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

kde  $U_0 = 0_{m \times 1}$  a  $U_k = (u_1 | u_2 | \dots | u_k)_{m \times k}$  pre  $k \geq 1$ .

### QR rozklad

Každá matica  $A_{m \times n}$  s lineárne nezávislými stĺpcami sa dá jednoznačne vyjadriť ako súčin  $A = QR$ , kde  $Q_{m \times n}$  má ortonormálne stĺpce tvoriace bázu stĺpcového priestoru  $\mathcal{R}(A)$  a  $R_{n \times n}$  je horná trojuholníková matica s kladnými zložkami na diagonále.

- *QR rozklad* presne popisuje Gram-Schmidtovu ortogonalizáciu lebo stĺpce matice  $Q = (q_1 | q_2 | \dots | q_n)$  tvoria Gram-Schmidtovu postupnosť pre stĺpce matice  $A = (a_1 | a_2 | \dots | a_n)$  a  $R$  je daná skalárnymi súčinnami

$$R = \begin{pmatrix} \nu_1 & q_1^* a_2 & q_1^* a_3 & \dots & q_1^* a_n \\ 0 & \nu_2 & q_2^* a_3 & \dots & q_2^* a_n \\ 0 & 0 & \nu_3 & \dots & q_3^* a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \nu_n \end{pmatrix},$$

kde  $\nu_1 = \|a_1\|$  a  $\nu_k = \|a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle q_i | a_k \rangle q_i\|$  pre  $k > 1$ .

### Lineárne systémy a QR rozklad

Ak  $h(A_{m \times n}) = n$  a  $A = QR$  je *QR rozklad* matice  $A$ , potom riešenie  $x = R^{-1} Q^T b$  regulárneho horného trojuholníkového systému

$$Rx = Q^T b$$

zodpovedá klasickému riešeniu  $Ax = b$  alebo riešeniu  $Ax = b$  v najmenších štvorcoch v závislosti od toho, či je  $Ax = b$  konzistentný.

- Systém  $Rx = Q^T b$  je numericky vhodnejší (řádovo polovičná podmienenosť) ako systém normálnych rovníc  $A^T Ax = A^T b$ .
- Choleského faktorizácia ( $LD^{1/2}D^{1/2}L^T$ ) symetrickej, kladne definitnej matice  $A^T A$  je  $R^T R$ , t.j. Gram-Schmidtova procedúra pre  $A$  a Gaussova eliminácia Gramovej matice  $A^T A$  je v zásade ten istý výpočet.

Vektorové normy (Kapitola 5.1):

### Euklidovská norma

Pre vektor  $x_{n \times 1}$  sa jeho *euklidovská norma* definuje ako

- $\|x\| = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2} = \sqrt{x^T x}$  pre  $x \in \mathbb{R}^n$ ,
- $\|x\| = (\sum_{i=1}^n |x_i|^2)^{1/2} = \sqrt{x^* x}$  pre  $x \in \mathbb{C}^n$ .

### Štandardný skalárny súčin

Skalárne výrazy definované vzťahmi

$$x^T y = \sum_{i=1}^n x_i y_i \in \mathbb{R} \quad \text{a} \quad x^* y = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i y_i \in \mathbb{C}$$

sa naývajú *štandardný skalárny súčin vektorov  $x$  a  $y$*  v  $\mathbb{R}^n$ , resp. v  $\mathbb{C}^n$ .

### Cauchy–Schwarzova nerovnosť

$$|x^* y| \leq \|x\| \|y\| \quad \text{pre všetky } x, y \in \mathbb{C}^n.$$

Rovnosť nastáva práve vtedy, keď  $y = \alpha x$  pre  $\alpha = x^* y / x^* x$ .

### Trojuholníková nerovnosť

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \text{pre všetky } x, y \in \mathbb{C}^n.$$

### $p$ -normy

Pre  $p \geq 1$  je  $p$ -norma vektora  $x \in \mathbb{C}^n$  definovaná ako  $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p}$ .

- Hölderova nerovnosť  $\rightarrow$  trojuholníková nerovnosť pre  $p$ -normy.
- $\infty$ -norma ako limita.

### Všeobecné normy na vektorových priestoroch

*Norma* na reálnom alebo komplexnom vektorovom priestore  $V$  je funkcia  $\|\cdot\|$  zobrazujúca  $V$  do  $\mathbb{R}$  spĺňajúca:

$$\begin{aligned} \|x\| &\geq 0 \quad \text{a} \quad \|x\| = 0 \iff x = 0, \\ \|\alpha x\| &= |\alpha| \|x\| \quad \text{pre všetky skaláry } \alpha, \\ \|x + y\| &\leq \|x\| + \|y\|. \end{aligned}$$

- Monotónnosť  $p$ -normiem
- Ekvivalencia vektorových normiem v konečnorozmernom vektorovom priestore.

Maticové normy (Kapitola 5.2):

### Frobeniova norma pre matice

Frobeniova maticová norma je pre  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$  definovaná vzťahmi

$$\|A\|_F^2 = \sum_{i,j} |a_{ij}|^2 = \sum_i \|A_{i*}\|^2 = \sum_j \|A_{*j}\|^2 = \text{Tr}(A^*A) = \text{Tr}(AA^*).$$

- Nerovnosti  $\|Ax\|_2^2 \leq \|A\|_F^2 \|x\|_2^2$  a  $\|AB\|_F^2 \leq \|A\|_F^2 \|B\|_F^2$ .

### Všeobecné normy pre matice

Maticová norma je funkcia  $\|\cdot\|$  zobrazujúca množinu všetkých komplexných matíc (všetkých konečných typov) do  $\mathbb{R}$  spĺňajúca:

$$\|A\| \geq 0 \quad \text{a} \quad \|A\| = 0 \iff A = 0.$$

$$\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\| \quad \text{pre všetky skaláry } \alpha.$$

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad \text{pre matice rovnakého typu.}$$

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\| \quad \text{pre všetky matice kompatibilné vzhľadom na násobenie.}$$

### Indukované maticové normy

Vektorové normy definované na  $\mathbb{C}^m$  a  $\mathbb{C}^n$  indukujú normu na priestore matíc  $M_{m \times n}(\mathbb{C})$  nasledovne:

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\| \quad \text{pre } A \in M_{m \times n}(\mathbb{C}), x \in \mathbb{C}^n.$$

Vo všeobecnosti je v definícii takejto *operátorovej normy* potrebné použiť  $\sup \|Ax\|$ , vďaka lokálnej kompaktnosti  $\mathbb{C}^n$  sa však toto suprémum niekde na jednotkovej sfére v  $\mathbb{C}^n$  nadobúda.

- Indukovaná maticová norma je zjavne kompatibilná s vektorovou normou v zmysle:

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|.$$

- Ak je  $A$  regulárna štvorcová matica, potom  $\min_{\|x\|=1} \|Ax\| = \frac{1}{\|A^{-1}\|}$ .

### Maticová 2-norma

- Pre maticovú normu indukovanú euklidovskou vektorovou normou platí

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}},$$

kde  $\lambda_{\max}$  je najväčšie (reálne) číslo  $\lambda$  také, že  $A^*A - \lambda I$  je singulárna.

- Ak je  $A$  regulárna (štvorcová), potom

$$\|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\min_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{\min}}},$$

kde  $\lambda_{\min}$  je najmenšie (reálne) číslo  $\lambda$  také, že  $A^*A - \lambda I$  je singulárna.

*Pozn.* V reči vlastných a singulárnych hodnôt toto znamená, že  $\lambda_{\max}$  a  $\lambda_{\min}$  sú najväčšia a najmenšia vlastná hodnota matice  $A^*A$  a  $\sigma_1 = (\lambda_{\max})^{1/2}$ ,  $\sigma_n = (\lambda_{\min})^{1/2}$  sú najväčšia a najmenšia singulárna hodnota matice  $A$ .

### Vlastnosti 2-normy

Okrem vlastností indukovanej normy maticová 2-norma má aj nasledujúce vlastnosti

- $\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \max_{\|y\|_2=1} |y^* Ax|$ .
- $\|A\|_2 = \|A^*\|_2$ .
- $\|A^* A\|_2 = \|A\|_2^2$ .
- $\| \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \|_2 = \max \{ \|A\|_2, \|B\|_2 \}$ .
- $\|U^* A V\|_2 = \|A\|_2$  ak  $U U^* = I$  a  $V^* V = I$ .



Maticové normy – dokončenie (Kapitola 5.2):

### Maticová 1-norma a $\infty$ -norma

Maticové normy indukované vektorovou 1-normou a  $\infty$ -normou sú:

- $\|A\|_1 = \max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|$   
= najväčší súčet absolútnych hodnôt po stĺpcoch.
- $\|A\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$   
= najväčší súčet absolútnych hodnôt po riadkoch.

- Dôkazy tvrdení o indukovaných maticových normách  $\|\cdot\|_1$  a  $\|\cdot\|_\infty$ .
- Indukované maticové normy majú vlastnosť submultiplikativity, lebo  $\|(AB)x\| = \|A(Bx)\| \leq \|A\| \|Bx\| \leq \|A\| (\|B\| \|x\|)$ , t.j.  $\max_{\|x\|=1} \|ABx\| \leq \|A\| \|B\|$ .

Priestory so skalárnym súčinom – opakovanie (Kapitola 5.3):

### Všeobecný skalárny súčin

*Skalárny súčin* na reálnom (alebo komplexnom) vektorovom priestore  $V$  je funkcia, ktorá priradí každej usporiadanej dvojici vektorov  $x, y$  reálny (alebo komplexný) skalár  $\langle x | y \rangle$ , pričom platí

- $\langle x | x \rangle$  je reálne číslo,  $\langle x | x \rangle \geq 0$  a  $\langle x | x \rangle = 0$  práve vtedy, keď  $x = 0$ ,
- $\langle x | \alpha y \rangle = \alpha \langle x | y \rangle$  pre všetky skaláry  $\alpha$ ,
- $\langle x | y + z \rangle = \langle x | y \rangle + \langle x | z \rangle$ ,
- $\langle x | y \rangle = \overline{\langle y | x \rangle}$  (v reálnom priestore to znamená  $\langle x | y \rangle = \langle y | x \rangle$ ).

Treba si všimnúť, že pre fixné  $x$  druhá a tretia vlastnosť hovoria, že  $\langle x | \cdot \rangle : y \mapsto \langle x | y \rangle$  je lineárnou funkciou v premennej  $y$ .

Reálny (alebo komplexný) vektorový priestor so skalárnym súčinom sa nazýva *euklidovský priestor* (resp. hermitovský priestor).

### Norma v priestore so skalárnym súčinom

Ak  $V$  je euklidovský (hermitovský) priestor so skalárnym súčinom  $\langle x | y \rangle$ , potom predpis

$$\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot | \cdot \rangle}$$

definuje vektorovú normu na  $V$ .

### Rovnoběžníková rovnosť

Pre danú normu  $\|\cdot\|$  na vektorovom priestore  $V$  k nej existuje skalárny súčin na  $V$ , spĺňajúci  $\langle \cdot | \cdot \rangle = \|\cdot\|^2$ , práve vtedy, keď pre všetky  $x, y \in V$  platí *rovnoběžníková rovnosť*:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Unitárne a ortogonálne matice, ortogonálna redukcia (Kapitoly 5.6 a 5.7):

### Unitárne a ortogonálne matice

- *Unitárna matica* je taká komplexná matica  $U_{n \times n}$ , ktorej stĺpce (alebo riadky) tvoria ortonormálnu bázu priestoru  $\mathbb{C}^n$ .
- *Ortogonálna matica* je taká reálna matica  $Q_{n \times n}$ , ktorej stĺpce (alebo riadky) tvoria ortonormálnu bázu priestoru  $\mathbb{R}^n$ .

### Charakterizácia unitárnych a ortogonálnych matíc

- Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné tomu, že komplexná matica  $U_{n \times n}$  je unitárna:
  - ▷  $U$  má ortonormálne stĺpce.
  - ▷  $U$  má ortonormálne riadky.
  - ▷  $U^{-1} = U^*$ .
  - ▷  $\|Ux\|_2 = \|x\|_2$  pre všetky  $x \in \mathbb{C}^n$ .
- Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné tomu, že reálna matica  $Q_{n \times n}$  je ortogonálna:
  - ▷  $Q$  má ortonormálne stĺpce.
  - ▷  $Q$  má ortonormálne riadky.
  - ▷  $Q^{-1} = Q^T$ .
  - ▷  $\|Qx\|_2 = \|x\|_2$  pre všetky  $x \in \mathbb{R}^n$ .

### Elementárne kolmé projekcie

Pre vektor  $u \in \mathbb{C}^n$  s normou  $\|u\| = 1$  sa matica tvaru

$$P = I - uu^*$$

nazýva *elementárny kolmý projektor*.

### Geometria elementárnych projekcií

Pre vektory  $u, x \in \mathbb{C}^n$ , pričom  $\|u\| = 1$ , platí

- $(I - uu^*)x$  je kolmá projekcia vektora  $x$  do ortogonálneho doplnku  $u^\perp$ , t.j. do priestoru zloženého zo všetkých vektorov kolmých na vektor  $u$ ;
- $u^*ux$  je kolmá projekcia vektora  $x$  na jednorozmerný priestor  $\text{span}(u)$ ;
- $|u^*x|$  predstavuje dĺžku ortogonálnej projekcie vektora  $x$  na jednorozmerný priestor  $\text{span}(u)$ .

### Elementárne reflexie

Pre nenulový vektor  $u_{n \times 1}$  je *elementárna reflexia* cez  $u^\perp$  (tiež *Householderova transformácia*) definovaná maticou

$$R = I - 2 \frac{uu^*}{u^*u}$$

alebo, ekvivalentne,

$$R = I - 2uu^* \quad \text{ak} \quad \|u\| = 1.$$

### Vlastnosti elementárnych reflexií

- Všetky elementárne reflexie  $R$  sú unitárne, hermitovské a involutórne ( $R^2 = I$ ). T.j.

$$R = R^* = R^{-1}.$$

- Ak  $x_{n \times 1}$  je vektor, ktorého prvá zložka  $x_1 \neq 0$  a ak sa vektor

$$u = x \pm \mu \|x\| e_1, \quad \text{kde } \mu = \begin{cases} 1 & \text{ak } x_1 \text{ je reálna,} \\ x_1/|x_1| & \text{ak } x_1 \text{ nie je reálna} \end{cases}$$

použije na vytvorenie elementárnej reflexie  $R$ , potom

$$Rx = \mp \mu \|x\| e_1.$$

Inými slovami,  $R$  "zrkadlí" vektor  $x$  na prvú súradnicovú os.

*Výpočtová poznámka:* Aby sa vyhlo chybám/vynulovaniu pri výpočtoch v aritmetike pohyblivej rádovej čiarky, pre reálne matice sa volí  $u = x + \text{sign}(x_1)\|x\|e_1$ .

- Elementárna reflexia zobrazujúca stĺpec  $A_{*1} = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1})^T$  na  $t_{11}e_1 = (t_{11}, 0, \dots, 0)^T$  sa dá využiť na redukciu  $A$  na horný lichobežníkový tvar  $T \rightarrow$  Householderova redukcia.

### Ortogonalná redukcia

- Pre každú maticu  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$  existuje unitárna matica  $P_{m \times m}$  taká, že

$$PA = T$$

má horný lichobežníkový tvar. Ak sa  $P$  získa ako súčin elementárnych reflektorov, tento proces sa nazýva *Householderova redukcia*.

- Ak je  $A$  štvorcová matica, potom  $T$  je horná trojuholníková štvorcová matica.
- Ak je  $A$  reálna, potom sa aj  $P$  dá zvoliť s reálnymi zložkami – ide o ortogonálnu maticu.

- Pre regulárnu štvorcovú maticu  $A$  máme  $QR$  rozklad  $A = QR$  aj ortogonálnu redukciu  $A = P^*T$ . Vďaka jednoznačnosti  $QR$ -rozkladu sa rovnajú (ak je diagonála v  $T$  kladná).

### QR rozklad

- Pre každú regulárnu maticu  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  existujú jednoznačne určená ortogonálna matica  $Q$  a jednoznačne určená horná trojuholníková matica  $R$  s kladnými zložkami na diagonále také, že

$$A = QR.$$

Štvorcový  $QR$ -rozklad je špeciálnym prípadom obdĺžnikového  $QR$ -rozkladu pre maticu  $A$  typu  $m \times n$  s  $h(A) = n$ .

- Algoritmus Householderovej redukcie je numericky stabilný, preto je niekedy vhodnejší pre výpočet  $QR$ -rozkladu ako Gram-Schmidtova ortogonalizácia. Podobne, je stabilnejší ako algoritmus pre  $LU$  rozklad (bez pivotovania, resp. s čiastočným pivotovaním).

Rozklady matíc BT, URV (Kapitola 5.11):

- Príklady pravej ( $AB = I$ ) a ľavej ( $CA = I$ ) inverznej matice pre  $A_{m \times n}$  plnej hodnosti:

$$C = (A^T A)^{-1} A^T, \quad B = A^T (A A^T)^{-1}.$$

- Vzorce fungujú vďaka  $h(A) = h(A^T A)$ , resp.  $h(A^T) = h(A A^T)$  v reálnom prípade a  $h(A) = h(A^* A)$ , resp.  $h(A^*) = h(A A^*)$  v komplexnom.
- Pre  $\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  dané predpisom  $\alpha(x) = Ax$ , kde matica  $A$  typu  $m \times n$  má hodnotu  $h(A) = r$  je zúžené zobrazenie  $\alpha|_{\mathcal{R}(A^T)} : \mathcal{R}(A^T) \rightarrow \mathcal{R}(A)$  izomorfizmom  $r$ -rozmerných podpriestorov  $\mathcal{R}(A^T)$  a  $\mathcal{R}(A)$ , lebo  $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{R}(A^T) = \{0\}$ , t.j.  $\ker \alpha|_{\mathcal{R}(A^T)} = \{0\}$ .
- Ako rozumne definovať *zovšeobecnené inverzné zobrazenie*  $\alpha^{GI} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , aby  $\alpha^{GI}|_{\mathcal{R}(A)} = (\alpha|_{\mathcal{R}(A^T)})^{-1}$ ? Dať  $\ker(\alpha^{GI}) = \mathcal{N}(A^T)$ ?

#### “BT” rozklad

Pre maticu  $A$  typu  $m \times n$  hodnosti  $h(A) = r$  existujú matice  $B_{m \times r}$  (“báza”) a  $T_{r \times n}$  (“horná trojuholníková”), obe s hodnotou  $r$ , spĺňajúce

$$A_{m \times n} = B_{m \times r} T_{r \times n}.$$

Matice  $B$  a  $T$  sa získajú pomocou Gaussovej eliminácie – stĺpce  $B$  tvoria bázu  $\mathcal{R}(A)$  (“pivotové” stĺpce), stupňovitá matica  $T$  pozostáva z  $r$  nenulových riadkov redukovaného stupňovitého tvaru  $E_A$  matice  $A$  (pozri kap. 2.2).

- Ak  $A = BT$  je  $BT$ -rozklad, potom k matici  $B_{m \times r}$  existuje (nejaká) ľavá inverzná  $L_{r \times m}$  a k matici  $T_{r \times n}$  (nejaká) pravá inverzná  $R_{n \times r}$ . Potom matica  $RL$  typu  $n \times m$  hodnosti  $r$  spĺňa rovnice vonkajšej ( $YAY = Y$ ) a vnútornej ( $AXA = A$ ) zovšeobecnenej inverzie. *Toto sme na prednáške nespravili, ale na niektorom z cvík sme skúmali vzorec  $A^\dagger = (BT)^\dagger = T^\dagger B^\dagger = T^T (T T^T)^{-1} (B^T B)^{-1} B^T$  a ukázali, že spĺňa Penroseove axiomy pre pseudoinverz, ktoré požadujú okrem vnútornej a vonkajšej inverzie aj symetriu súčinov  $AA^\dagger$  a  $A^\dagger A$ .*

#### “URV” rozklad

Pre každú maticu  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  hodnosti  $r$  existujú ortogonálne matice  $U_{m \times m}$  a  $V_{n \times n}$  a regulárna matica  $C_{r \times r}$  taká, že

$$A = URV^T = U \begin{pmatrix} C_{r \times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^T.$$

- Prvých  $r$  stĺpcov matice  $U$  tvorí ortonormálnu bázu  $\mathcal{R}(A)$ .
- Posledných  $m - r$  stĺpcov matice  $U$  tvorí ortonormálnu bázu  $\mathcal{N}(A^T)$ .
- Prvých  $r$  stĺpcov matice  $V$  tvorí ortonormálnu bázu  $\mathcal{R}(A^T)$ .
- Posledných  $n - r$  stĺpcov matice  $V$  tvorí ortonormálnu bázu  $\mathcal{N}(A)$ .

Každý výber ortonormálnych báz pre štyri základné podpriestory matice  $A$  vedie k jej inému  $URV$  rozkladu. V komplexnom prípade treba nahradiť “ortogonálne” “unitárnym” a transponovanie  $(\cdot)^T$  hermitovským združením  $(\cdot)^*$ .

- Pomocou ortogonálnej redukcie (Householderova redukcia) sa dá dosiahnuť, že matica  $C$  v  $URV$  rozklade bude dolná trojuholníková.

Singulárny rozklad a pseudoinverzy (Kapitola 5.12):

- Ak sa za stĺpce  $U_{m \times m}$  a  $V_{n \times n}$  v  $URV$ -rozklade vezmú vlastné vektory matíc  $AA^T$ , resp.  $A^T A$ , dostaneme dokonca diagonálnu maticu  $R$  – singulárny rozklad.

- Singulárne vektory  $u_1$  a  $v_1$  v  $U$  a  $V$ , zodpovedajúce najväčšej singulárnej hodnote  $\sigma_1$ , sú tie, kde sa realizuje indukovaná maticová norma, t.j.

$$\sigma_1 = \|A^T\|_2 = \max_{\|y\|_2=1} \|A^T y\|_2 = \|A^T u_1\|_2 \quad \text{a} \quad \sigma_1 = \|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \|Av_1\|_2.$$

- dôkaz pomocou Lagrangeových multiplikátorov - pozri dôkaz rovnosti 5.2.7 na str. 281–282 (plus odkaz na str. 227) v C. Meyer: *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*
- Platí tiež  $v_i = \frac{A^T u_i}{\sigma_i}$  a  $u_i = \frac{Av_i}{\sigma_i}$ .

### Singulárny rozklad

Pre každú maticu  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  hodnoti  $r$  existujú ortogonálne matice  $U_{m \times m}$  a  $V_{n \times n}$  a diagonálna matica  $D_{r \times r} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$  taká, že

$$A = U \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^T, \quad \text{kde } \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0.$$

Reálne čísla  $\sigma_i$  sa nazývajú *singulárne hodnoty* matice  $A$ . Ak  $r < p = \min\{m, n\}$ , hovoríme, že  $A$  má dodatočných  $p-r$  nulových singulárnych hodnôt. Takýto rozklad sa nazýva *singulárny rozklad* matice  $A$  (singular value decomposition), stĺpce matíc  $U$  a  $V$  sú ľavé, resp. pravé *singulárne vektory* matice  $A$ .

- Penroseove rovnice pre pseudoinverziu:

$$\begin{aligned} AA^\dagger A &= A, & A^\dagger AA^\dagger &= A^\dagger, \\ (AA^\dagger)^T &= AA^\dagger, & (A^\dagger A)^T &= A^\dagger A. \end{aligned}$$

- Dá sa ukázať, že tento systém rovníc má jednoznačné riešenie.

Singularný rozklad a pseudoinverzy – dokončenie (Kapitola 5.12):

**Moore–Penrosove pseudoinverzné matice**Pomocou  $URV$  rozkladu sa dá Mooreova-Penroseova pseudoinverzná matica pre

$$A_{m \times n} = U \begin{pmatrix} C_{r \times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^T \quad \text{vyjadriť ako} \quad A_{n \times m}^\dagger = V \begin{pmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^T.$$

- Ak je systém  $Ax = b$  konzistentný,  $x = A^\dagger b$  je jeho riešenie s minimálnou euklidovskou normou.
- Ak je systém  $Ax = b$  nekonzistentný,  $x = A^\dagger b$  je jeho riešením v najmenších štvorcoch s minimálnou euklidovskou normou.
- Pri použití SVD-rozkladu s  $C = D = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$  máme

$$A^\dagger = V \begin{pmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^T = \sum_{i=1}^r \frac{v_i u_i^T}{\sigma_i} \quad \text{a} \quad A^\dagger b = \sum_{i=1}^r \frac{(u_i^T b)}{\sigma_i} v_i.$$

**Obraz jednotkovej sféry**

Pre regulárnu  $n \times n$  maticu  $A$  so singularnými hodnotami  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n$  a  $SVD$  rozkladom  $A = UDV^T$  s  $D = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$  je obraz jednotkovej sféry vzhľadom na 2-normu elipsoid, ktorého  $k$ -ta polos je  $\sigma_k U_{*k}$  ( $\sigma_k$ -násobok  $k$ -teho stĺpca matice  $U$ ). Navyše, vektor  $V_{*k}$  reprezentuje bod na jednotkovej sfére, ktorý sa zobrazí na koncový bod tejto polosi,  $AV_{*k} = \sigma_k U_{*k}$ . Špeciálne

- $\sigma_1 = \|AV_{*1}\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \|A\|_2$ ,
- $\sigma_n = \|AV_{*n}\|_2 = \min_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = 1/\|A^{-1}\|_2$ ,

Miera deformácie (sploštenia) jednotkovej sféry transformáciou danou  $A$  vieme určiť pomocou čísla *podmienosti* vzhľadom na 2-normu

- $\kappa_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_n} = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 \geq 1$ .

Treba si všimnúť, že  $\kappa_2 = 1$  práve vtedy, keď  $A$  je ortogonálna matica a ňou daná transformácia je izometria.

- pre systém  $Ax = b$  má riešenie  $A^\dagger b$  (s použitím pseudoinverzu  $A^\dagger$ ) najmenšiu euklidovskú normu spomedzi riešení (klasických, či v najmenších štvorcoch)

Determinanty (Kapitoly 6.1 a 6.2):

- opakovanie z I. ročníka, str. 459–488 v knihe C. Meyera, “rámčeky” uvedené v Prehľade III.

Základné vlastnosti vlastných hodnôt a vektorov (Kapitola 7.1):

- opakovanie z I. ročníka, str. 489–496 v knihe C. Meyera, “rámčeky” uvedené v Prehľade IV.
- ak  $\lambda \in \sigma(A)$ , tak aj  $\bar{\lambda} \in \sigma(A)$  pre reálnu maticu  $A$
- *symetrické polynómy*, príklad pre  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ :

$$s_1 = \sum_i \lambda_i = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4,$$

$$s_2 = \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_4 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_4 + \lambda_3 \lambda_4,$$

$$s_3 = \sum_{i < j < k} \lambda_i \lambda_j \lambda_k = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_4 + \lambda_1 \lambda_3 \lambda_4 + \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4$$

$$s_4 = \sum_{i < j < k < l} \lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4.$$

### Koeficienty charakteristického polynómu

Ak má charakteristická rovnica matice  $A_{n \times n}$  tvar  $\lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + c_2 \lambda^{n-2} + \dots + c_{n-1} \lambda + c_n = 0$  a ak  $s_k$  označuje  $k$ -ty symetrický polynóm vlastných hodnôt  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , potom

- $c_k = (-1)^k \sum$  (všetky hlavné  $k \times k$  minory),
- $s_k = \sum$  (všetky hlavné  $k \times k$  minory),
- $\text{Tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = -c_1$ ,
- $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = (-1)^n c_n$ .

- spojitá závislosť vlastných hodnôt matice od jej zložiek
- spektrálny polomer  $\rho(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$  a jeho ohraničenie pomocou (ľubovoľnej) maticovej normy  $\rho(A) \leq \|A\|$ .

### Geršgorinove kruhy

- Všetky vlastné hodnoty matice  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$  sa nachádzajú v množine  $\mathcal{G}_r$  – zjednotení  $n$  Geršgorinových kruhov daných pomocou

$$|z - a_{ii}| \leq r_i, \quad \text{kde} \quad r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \|a_{ij}\| \quad \text{pre } i = 1, 2, \dots, n.$$

Inými slovami, vlastné hodnoty sú “uväznené” v sade kruhov so stredmi  $a_{ii}$  s polomerami danými súčtami absolútnych hodnôt zložiek v stĺpci  $A_{*i}$  okrem diagonálnej zložky  $a_{ii}$ .

- Navyše, ak zjednotenie  $\mathcal{U}$   $k$ -tich Geršgorinových kruhov nemá prienik so zvyšnými  $n - k$  kruhmi, potom sa v  $k$ -kruhovom  $\mathcal{U}$  nachádza práve  $k$  vlastných hodnôt matice  $A$ , počítajúc s násobnosťami.
- Keďže  $\sigma(A) = \sigma(A^T)$ , sčítanie absolútnych hodnôt mimodiagonálnych zložiek po riadkoch sa dá nahradiť súčtom po stĺpcoch, teda vlastné hodnoty sa nachádzajú aj v zjednotení kruhov  $\mathcal{G}_c$  daných pomocou

$$|z - a_{ii}| \leq c_j, \quad \text{kde} \quad c_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \|a_{ij}\| \quad \text{pre } j = 1, 2, \dots, n.$$

- Kombináciou riadkového a stĺpcového prístupu dostávame, že vlastné hodnoty matice  $A$  sa nachádzajú v prieniku  $\mathcal{G}_r \cap \mathcal{G}_c$ .

- dôkaz sme nestihli

Základné vlastnosti vlastných hodnôt a vektorov (Kapitola 7.1):

- Geršgorinova veta: dôkaz

Diagonalizácia pomocou podobnostnej transformácie (Kapitola 7.2):

### Schurova veta o triangularizácii

Každá štvorcová matica je unitárne podobná hornej trojuholníkovej matici. To znamená, že pre každú  $A_{n \times n}$  existuje unitárna matica  $U$  (nie jednoznačná) a horná trojuholníková  $T$  (nie jednoznačná) také, že  $U^*AU = T$ . Diagonálne zložky  $T$  sú vlastnými hodnotami  $A$ .

- dôkaz indukciou
- vybrať vlastný vektor  $x$  matice  $A$ , doplniť na ortonormálnu bázu, napr. pomocou elementárnej reflexie posielajúcej  $x \leftrightarrow e_1$ ,  $R = (x|V)$ , potom  $R^{-1}AR = RAR = \begin{pmatrix} \lambda & x^*AV \\ 0 & V^*AV \end{pmatrix}$ , pokračovať s  $(n-1) \times (n-1)$  maticou  $V^*AV$ .
- Cayley-Hamiltonova veta:  $\chi_A(A) = 0$ .
- Dôkaz pomocou Schurovej lemy; najprv ukázať pre trojuholníkové matice  $\chi_T(T) = 0$ , tvrdenie potom vyplýva z podobnosti – pozrieť ZS 2020/21, resp. knihu

### Násobnosti

Pre  $\lambda \in \sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s\}$  definujeme:

- Algebraická násobnosť vlastnej hodnoty  $\lambda$  zodpovedá násobnosti  $\lambda$  ako koreňa charakteristického polynómu  $\chi_A(x)$ . Inými slovami,  $\text{alg mult}_A(\lambda_i) = a_i$  práve vtedy, keď  $(x - \lambda_1)^{a_1} \dots (x - \lambda_s)^{a_s} = 0$  je charakteristickou rovnicou matice  $A$ .
- Ak  $\text{alg mult}_A(\lambda) = 1$ ,  $\lambda$  sa nazýva *jednoduchou* vlastnou hodnotou matice  $A$ .
- Geometrická násobnosť vlastnej hodnoty  $\lambda$  je  $\dim \mathcal{N}(A - \lambda I)$ . Inými slovami,  $\text{geo mult}_A(\lambda)$  zodpovedá najväčšiemu počtu lineárne nezávislých vlastných vektorov prislúchajúcich k vlastnej hodnote  $\lambda$ .
- Vlastné hodnoty, pre ktoré  $\text{alg mult}_A(\lambda) = \text{geo mult}_A(\lambda)$ , sa nazývajú *polo-jednoduché* (semisimple) vlastné hodnoty matice  $A$ .

### Nerovnosť násobností

Pre každú maticu  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$  a pre každé  $\lambda \in \sigma(A)$  platí:

$$\text{geo mult}_A(\lambda) \leq \text{alg mult}_A(\lambda).$$

### Diagonalizovateľnosť a násobnosti

Matica  $A$  typu  $n \times n$  je diagonalizovateľná práve vtedy, keď

$$\text{geo mult}_A(\lambda) = \text{alg mult}_A(\lambda)$$

pre každé  $\lambda \in \sigma(A)$ , teda práve vtedy, keď je každá jej vlastná hodnota polojednoduchá.



### Spektrálna veta pre diagonalizovateľné matice

Matica  $A_{n \times n}$  so spektrom  $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$  je diagonalizovateľná práve vtedy, ak existujú matice  $\{G_1, G_2, \dots, G_k\}$  spĺňajúce

$$A = \lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 + \dots + \lambda_k G_k,$$

pričom  $G_i$  majú nasledujúce vlastnosti:

- $G_i$  je projekčná matice na  $\mathcal{N}(A - \lambda_i I)$  v smere  $\mathcal{R}(A - \lambda_i I)$ .
- $G_i G_j = 0$  pre  $i \neq j$ .
- $G_1 + G_2 + \dots + G_k = I$ .

Takýto rozklad sa nazýva *spektrálny rozklad matice*  $A$  a  $G_i$  sa nazývajú *spektrálne projektory* prislúchajúce  $A$ .

### Jednoduché vlastné hodnoty a projektory

Ak  $x$  a  $y^*$  sú pravé a ľavé vlastné vektory prislúchajúce jednoduchej vlastnej hodnote  $\lambda \in \sigma(A)$ , potom

$$G = \frac{xy^*}{y^*x}$$

je projektor na  $\mathcal{N}(A - \lambda I)$  v smere  $\mathcal{R}(A - \lambda I)$ , teda  $G$  je spektrálny projektor prislúchajúci vlastnej hodnote  $\lambda$ .

### Súhrn diagonalizovateľnosti

Pre  $n \times n$  maticu  $A$  so spektrom  $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$  sú nasledujúce podmienky ekvivalentné:

- $A$  je podobná diagonálnej matici, t.j.  $P^{-1}AP = D$ .
- $A$  má úplnú sadu lineárne nezávislých vlastných vektorov.
- Každá vlastná hodnota  $\lambda_i$  je polojednoduchá, t.j.  $\text{geo mult}_A(\lambda_i) = \text{alg mult}_A(\lambda_i)$ .
- $A = \lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 + \dots + \lambda_k G_k$ , kde
  - ▷  $G_i$  je projektor na  $\mathcal{N}(A - \lambda_i I)$  v smere  $\mathcal{R}(A - \lambda_i I)$ ,
  - ▷  $G_i G_j = 0$  pre  $i \neq j$ ,
  - ▷  $G_1 + G_2 + \dots + G_k = I$ ,
  - ▷  $G_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k (A - \lambda_j I) / \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k (\lambda_i - \lambda_j)$ ,
  - ▷ Ak  $\lambda_i$  je jednoduchá vlastná hodnota, ktorej prislúchajú pravý a ľavý vlastný vektor  $x$ , resp.  $y^*$ , potom  $G_i = xy^*/y^*x$ .

Normálne matice (Kapitola 7.5):

- Kedy sú pravé vlastné vektory (stĺpce  $P$ ) aj ľavými (riadky  $P^T$ )? Tvoria ortonormálnu bázu, resp.  $P^{-1} = P^T$  – matice  $P$  je ortogonálna (unitárna).

### Unitárna diagonalizácia

Matica  $A_{n \times n}$  je unitárne podobná diagonálnej matici (t.j.  $A$  má úplnú sadu ortonormálnych vlastných vektorov) práve vtedy, keď  $A^*A = AA^*$ . Matice spĺňajúce túto rovnosť sa nazývajú *normálne*.

- Ak  $U^*AU = D$ , kde  $U$  je unitárna a  $D$  diagonálna, stĺpce  $U$  tvoria úplnú sadu ortonormálnych vlastných vektorov matice  $A$  a diagonálne zložky matice  $D$  sú príslušné vlastné hodnoty.

Normálne matice (Kapitola 7.5):

### Unitárna diagonalizácia

Matica  $A_{n \times n}$  je unitárne podobná diagonálnej matici (t.j.  $A$  má úplnú sadu ortonormálnych vlastných vektorov) práve vtedy, keď  $A^*A = AA^*$ . Matice spĺňajúce túto rovnosť sa nazývajú *normálne*.

- Ak  $U^*AU = D$ , kde  $U$  je unitárna a  $D$  diagonálna, stĺpce  $U$  tvoria úplnú sadu ortonormálnych vlastných vektorov matice  $A$  a diagonálne zložky matice  $D$  sú príslušné vlastné hodnoty.

- Dôkaz v knihe používa fakt, že normálne matice sú tzv. RPN matice (“range perpendicular to null-space”), t.j.  $\mathcal{R}(A) \perp \mathcal{N}(A)$ . Pre ne má  $URV$  rozklad tvar  $URU^*$ .
- Na prednáške sme ukázali, že unitárna podobnosť zachováva normalitu a povedali si, že normálne trojuholníkové matice musia byť diagonálne. Potom tvrdenie vyplýva zo Schurovej lemy.

### Symetrické a hermitovské matice

Okrem vlastností, ktoré majú všetky normálne matice,

- reálne symetrické a hermitovské matice majú reálne vlastné hodnoty,
- $A$  je reálna symetrická práve vtedy, keď je ortogonálne podobná reálnej diagonálnej matici  $D$  – t.j.  $P^TAP = D$  pre nejakú ortogonálnu maticu  $P$ ,
- reálne antisymetrické a antihermitovské matice majú rýdzo imaginárne vlastné hodnoty.

Funkcie diagonalizovateľných matíc (Kapitola 7.3):

- Ak  $P^{-1}AP = B$ , potom pre ľubovoľný polynóm  $p(x)$  platí  $p(B) = P^{-1}p(A)P$ .
- Inšpirácia mocninovými radmi, napr.  $e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ , vedie k definícii *maticovej exponenciály*:  
 $e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$
- Pre diagonalizovateľnú maticu  $A = PDP^{-1}$  dostaneme rovnosť  $e^A = P \operatorname{diag}(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots, e^{\lambda_n}) P^{-1}$ .

### Funkcie diagonalizovateľných matíc

Nech  $A = PDP^{-1}$  je diagonalizovateľná matica, v ktorej sú vlastné hodnoty v  $D = \operatorname{diag}(\lambda_1 I, \lambda_2 I, \dots, \lambda_k I)$  zlučené pri opakovaní. Pre funkciu  $f(z)$ , ktorá je definovaná pre každé  $\lambda_i \in \sigma(A)$ , definujeme

$$f(A) = P f(D) P^{-1} = P \begin{pmatrix} f(\lambda_1)I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f(\lambda_2)I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f(\lambda_k)I \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$= f(\lambda_1)G_1 + f(\lambda_2)G_2 + \dots + f(\lambda_k)G_k,$$

kde  $G_i$  je  $i$ -ty spektrálny projektor príslúchajúci vlastnej hodnote  $\lambda_i$ .

### Nekonečné rady

Ak  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$  konverguje pre  $|z - z_0| < r$  a ak  $|\lambda_i - z_0| < r$  pre každú vlastnú hodnotu diagonalizovateľnej matice  $A$ , potom

$$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(A - z_0 I)^n.$$

Navyše sa dá ukázať, že maticový rad na pravej strane konverguje práve vtedy, keď  $|\lambda_i - z_0| < r$  pre každé  $\lambda_i$ , bez ohľadu na to, či je alebo nie je matica  $A$  diagonalizovateľná. Preto takýto rad slúži ako definícia  $f(A)$  pre funkcie, ktoré sa dajú vyjadriť pomocou Taylorovho radu bez ohľadu na diagonalizovateľnosť matice  $A$ .

### Funkcie Jordanových blokov

Pre  $k \times k$  Jordanov blok  $J_*$  s vlastnou hodnotou  $\lambda$  a pre funkciu  $f(z)$ , pre ktorú sú definované  $f(\lambda)$ ,  $f'(\lambda)$ , ...,  $f^{(k-1)}(\lambda)$ , je  $f(J_*)$  definované ako

$$f(J_*) = f \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \frac{f''(\lambda)}{2!} & \cdots & \frac{f^{(k-1)}(\lambda)}{(k-1)!} \\ & f(\lambda) & f'(\lambda) & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{f''(\lambda)}{2!} \\ & & & f(\lambda) & f'(\lambda) \\ & & & & f(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Systémy diferenciálnych rovníc (Kapitola 7.4):

- Pre maticovú exponenciálu  $e^{At}$  diagonalizovateľnej matice  $A = PDP^{-1}$  platí:
  - ▷  $\frac{de^{At}}{dt} = P \operatorname{diag} \left( \frac{de^{\lambda_1 t}}{dt}, \frac{de^{\lambda_2 t}}{dt}, \dots, \frac{de^{\lambda_n t}}{dt} \right) P^{-1} = P \operatorname{diag} (\lambda_1 e^{\lambda_1 t}, \lambda_2 e^{\lambda_2 t}, \dots, \lambda_n e^{\lambda_n t}) P^{-1} = Ae^{At}$ .
  - ▷  $Ae^{At} = e^{At}A$  (resp.  $Af(A) = f(A)A$  pre ľubovoľnú maticovú funkciu  $f(A)$ ).
  - ▷  $e^{-At}e^{At} = e^{At}e^{-At} = I = e^0$ .
- Z prvej rovnosti vyplýva, že  $u(t) = e^{At}c$  bude riešením lineárneho systému diferenciálnych rovníc (s konštantnými koeficientami)  $u' = Au$  a počiatkovou podmienkou  $u(0) = c$ .

### Diferenciálne rovnice

Ak  $A_{n \times n}$  je diagonalizovateľná so spektrom  $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ , potom riešenie lineárnej diferenciálnej rovnice  $u' = Au$  s počiatkovou podmienkou  $u(0) = c$  sa dá vyjadriť ako

$$u(t) = e^{At}c = e^{\lambda_1 t}v_1 + e^{\lambda_2 t}v_2 + \dots + e^{\lambda_k t}v_k,$$

kde  $v_i$  je vlastný vektor získaný  $i$ -tým spektrálnym projektorom  $G_i$ :  $v_i = G_i c$ .

Kladne definitné matice (Kapitola 7.6):

- Nezdá sa, že by obsahovala oveľa viac, ako bolo na LAG II.

Jordanove tvary a maticové funkcie (Kapitola 7.7, 7.8 a 7.9):

- Nestihli sme ... Na skúšku sa očakávajú vedomosti na úrovni LAG II, pozri Prehľad 4.

Kladné matice (Kapitola 8.2):

- Na prednáške sme stihli len prehľad tvrdení. Dôkazy – kniha, resp. ZS 2020/21
- Definícia kladnej a nezápornej matice:  $A > 0$  ak  $a_{ij} > 0$ , resp.  $A \geq 0$  ak  $a_{ij} \geq 0$  pre všetky  $i, j$ .

- Aplikácie: výrobné vzťahy (produkčná/technologická matica), pravdepodobnosti, stochastické matice prechodu, atď.
- $A > 0 \implies \rho(A) > 0$
- Zopár nerovností:
  - $P > 0, x \geq 0, x \neq 0 \implies Px > 0,$
  - $N \geq 0, u \geq v \geq 0 \implies Nu \geq Nv,$
  - $N \geq 0, z > 0, Nz = 0 \implies N = 0,$
  - $N \geq 0, N \neq 0, u > v > 0 \implies Nu > Nv.$
- $|Ax| \leq |A||x|$ , kde  $|x|^T = (|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$ . Tiež  $|A| = A \iff A \geq 0$ .

### Kladná vlastná hodnota a kladný vlastný vektor

Ak  $A_{n \times n} > 0$ , potom platí:

- $\rho(A) \in \sigma(A)$ .
- Ak  $Ax = \rho(A)x$ , potom  $A|x| = \rho(A)|x|$  a  $|x| > 0$ .

Inými slovami, kladná matica  $A$  má (reálnu) vlastnú hodnotu  $\rho(A)$ , ktorej prislúcha kladný vlastný vektor  $v > 0$ .

### Index $\rho(A)$

Ak  $A_{n \times n} > 0$ , potom platí:

- $\rho(A)$  je jediná vlastná hodnota matice  $A$  na jej spektrálnej kružnici.
- $index(\rho(A)) = 1$ , t.j.  $\rho(A)$  je polo-jednoduchá vlastná hodnota – jej geometrická násobnosť sa rovná algebraickej, a teda zodpovedajúce Jordanove bloky sú veľkosti  $1 \times 1$ .

### Násobnosť $\rho(A)$

Ak  $A_{n \times n} > 0$ , potom  $alg\ mult_A(\rho(A)) = 1$ . Inými slovami, spektrálny polomer je jednoduchou vlastnou hodnotou matice  $A$ , preto  $\dim \mathcal{N}(A - \rho(A)I) = geo\ mult_A(\rho(A)) = alg\ mult_A(\rho(A)) = 1$ .

- Význačná vlastná hodnota  $r = \rho(A)$  pre  $A > 0$  sa nazýva *Perronov koreň* a jednoznačný vlastný vektor  $p \in \mathcal{N}(A - \rho(A)I)$  s  $p > 0$  a  $\sum_j p_j = 1$  sa nazýva *Perronov vektor*.
- Podobne existuje aj *ľavý Perronov vektor* (keďže aj  $A^T$  je kladná).

### Žiadne ďalšie kladné vlastné vektory

Pre kladnú maticu  $A_{n \times n} > 0$  neexistuje iný nezáporný vlastný vektor okrem Perronovho vektora a jeho kladných násobkov

### Perronova veta

Ak  $A_{n \times n} > 0$  a  $r = \rho(A)$ , potom platí:

- $r > 0$ .
- $r \in \sigma(A)$  ( $r$  sa nazýva Perronov koreň).
- $\text{alg mult}_A(\rho(A)) = 1$ .
- Existuje vlastný vektor  $x > 0$ , pre ktorý  $Ax = rx$ .
- Perronov vektor je jednoznačne určený vektor, spĺňajúci

$$Ap = rp, \quad p > 0, \quad \text{a} \quad \|p\|_1 = 1.$$

Okrem jeho kladných násobkov neexistujú žiadne nezáporné vlastné vektory pre maticu  $A$ , bez ohľadu na vlastnú hodnotu.

- $r$  je jediná vlastná hodnota na spektrálnej kružnici matice  $A$ .
- $r = \max_{x \in \mathcal{N}} f(x)$  (Collatzova-Wielandtova formula),  
kde  $f(x) = \min_{\substack{1 \leq i \leq n \\ x_i \neq 0}} \frac{[Ax]_i}{x_i}$  a  $\mathcal{N} = \{x \mid x \geq 0 \text{ a } x \neq 0\}$ .

Nezáporné matice (Kapitola 8.3):

- Permutačné matice mávajú viacero rôznych vlastných hodnôt na spektrálnej kružnici  $\rightarrow$  Frobeniova teória.

Stochastické matice a markovovské reťazce (Kapitola 8.4):

- Zložky *stochastickej matice*  $A$  označujú pravdepodobnosti prechodov medzi jednotlivými stavmi, t.j. sú nezáporné a v závislosti od konvencie je ich súčet po stĺpcoch, resp. riadkoch rovný 1. Potom  $\rho(A) = 1$ , jej ľavý Perronov vektor je  $p_l^T = (1, 1, \dots, 1)$  a pravý Perronov vektor  $p_r$  predstavuje (v ireducibilnom prípade) stabilný stav.
- Aplikácie: Google matrix a Page rank, Markov Chain Monte Carlo (pozri odkazy z web-stránky).