

Podvázanie pri písomke je vážnym porušením Študijného poriadku FMFI UK, ktoré môže viesť k vylúčeniu zo štúdia. Nerobte hlúposti. Počas písomky je zakázané používať mobilné telefóny a iné elektronické zariadenia. Veľa zdaru!

Písomka z Maticového počtu, 21. november 2023

1. Ukážte, že pre regulárne $n \times n$ matice A, B platí:

$$(A + B)^{-1} = (A - BA^{-1}B)^{-1} + (B - AB^{-1}A)^{-1},$$

príčom predpokladáme existenciu všetkých inverzných matíc.

Návod: Vyjadrite $B - AB^{-1}A = (A - BA^{-1}B)X$ pre vhodnú maticu X .

2. a) Ukážte, že pre regulárnu $n \times n$ maticu A spĺňa indukovaná 2-norma nerovnosť

$$1 \leq \|A^{-1}\|_2 \|A\|_2.$$

- b) Ukážte, že pre regulárnu $n \times n$ maticu A a ľubovoľnú singulárnu $n \times n$ maticu B platí

$$1 \leq \|A^{-1}\|_2 \|A - B\|_2.$$

Návod: Uvažujte zložené zobrazenie dané maticami A^{-1} a $A - B$ aplikované na $v \in \mathcal{N}(B)$.

3. Nech A je $n \times n$ matica.

a) Aký je vzťah medzi hodnotou matice A a blokovej matice $[A|A^2]$? Zdôvodnite.

b) Ak je A typu $m \times n$ s hodnotou $h(A) = r$, aké sú dimenzie nulových priestorov $\mathcal{N}(A)$ a $\mathcal{N}([A|A])$? Zdôvodnite.

4. Pre $n \times n$ maticu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \end{bmatrix}$$

nájdite jej LDU rozklad, matice L^{-1}, U^{-1} a pomocou nich aj jej inverznú maticu A^{-1} . Svoj postup primerane zdôvodnite.