Maticový počet – Prehľad IV.

Prehľad definícií, tvrdení a dôležitých faktov z LAG I. a II. v 1. ročníku.

Priebežne si prezrite nasledujúce "rámčeky" – prebrané z kapitol 7. a 8. knihy C. D. Meyera, *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. Neoznačené by mali byť známe z LAG I, II. Tie, ktoré sú označené jednou hviezdičkou *, asi v prvom ročníku neboli a pravdepodobne sa k nim nedostaneme podrobne ani na prednáške. Tým, ktoré sú označené dvoma hviezdičkami **, sa ešte budeme venovať.

Vlastné hodnoty a vlastné vektory

Pre $n \times n$ maticu A sa skalár λ a nenulový vektor $x_{n\times 1}$ spĺňajúce $Ax = \lambda x$ nazývajú *vlastná hodnota*, resp. *vlastný vektor* matice A. Množina (rôznych) vlastných hodnôt, označená $\sigma(A)$, sa nazýva *spektrum* matice A.

- $\lambda \in \sigma(A) \iff A - \lambda I$ je singulárna $\iff \det(A - \lambda I) = 0$.
- $\{x \neq 0 \,|\, x \in \mathcal{N}(A - \lambda I)\}$ je množina všetkých vlastných vektorov prislúchajúcich λ. Priestor $\mathcal{N}(A - \lambda I)$ sa nazýva *vlastný (pod)priestor* matice A.
- Nenulové riadkové vektory y^* spĺňajúce $y^*(A - \lambda I) = 0$ sa nazývajú *ľavé vlastné vektory* matice A.

Charakteristický polynóm a charakteristická rovnica

- *Charakteristický polynóm* matice $A_{n\times n}$ je $\chi(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. Stupeň $\chi(\lambda)$ je n a vedúci člen $(-1)^n\lambda^n$.
- *Charakteristická rovnica* pre maticu A je $\chi(\lambda) = 0$.
- Vlastné hodnoty matice A sú riešeniami charakteristickej rovnice, teda korene charakteristického polynómu.
- Matica A má spolu n vlastných hodnôt, niektoré však môžu byť komplexné (aj ak sú zložky A reálne) alebo môžu byť niektoré vlastné hodnoty viacnásobné.
- Ak A obsahuje iba reálne zložky, potom sa jej komplexné vlastné hodnoty musia vyskytovať v združených pároch, t.j. ak $\lambda \in \sigma(A)$, aj $\bar{\lambda} \in \sigma(A)$.

**** Koeficienty charakteristického polynómu**

Ak má charakteristická rovnica matice $A_{n\times n}$ tvar $\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \cdots + c_{n-1}\lambda + c_n = 0$ a ak s_k označuje k-ty symetrický polynóm vlastných hodnôt $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, potom

- $c_k = (-1)^k \sum(\text{všetky hlavné } k \times k \text{ minory})$,
- $s_k = \sum(\text{všetky hlavné } k \times k \text{ minory})$,
- $\mathrm{Tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = -c_1$,
- $\det(A) = \lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_n = (-1)^n c_n$.

** Geršgorinove kruhy

- Všetky vlastné hodnoty matice $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ sa nachádzajú v množine $\mathcal{G}_r$ – zjednotení n *Geršgorinovych kruhov* daných pomocou
$$|z - a_{ii}| \le r_i, \qquad \text{kde} \qquad r_i = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \|a_{ij}\| \quad \text{pre } i = 1, 2, \ldots, n.$$
Inými slovami, vlastné hodnoty sú "uväznené" v sade kruhov so stredmi a_{ii} s polomermi danými súčtami absolútnych hodnôt zložiek v stĺpci A_{*i} okrem diagonálnej zložky a_{ii}.
- Navyše, ak zjednotenie $\mathcal{U}$ k-tich Geršgorinovych kruhov nemá prienik so zvyšnými $n - k$ kruhmi, potom sa v k-kruhovom $\mathcal{U}$ nachádza práve k vlastných hodnôt matice A, počítajúc s násobnosťami.
- Keďže $\sigma(A) = \sigma(A^T)$, sčítanie absolútnych hodnôt mimodiagonálnych zložiek po riadkoch sa dá nahradiť súčtom po stĺpcoch, teda vlastné hodnoty sa nachádzajú aj v zjednotení kruhov $\mathcal{G}_c$ daných pomocou
$$|z - a_{ii}| \le c_j, \qquad \text{kde} \qquad c_j = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} \|a_{ij}\| \quad \text{pre } j = 1, 2, \ldots, n.$$
- Kombináciou riadkového a stĺpcového prístupu dostávame, že vlastné hodnoty matice A sa nachádzajú v prieniku $\mathcal{G}_r \cap \mathcal{G}_c$.

Podobnosť

- Dve $n \times n$ matice A a B sa nazývajú *podobné*, ak pre ne existuje regulárna matica P spĺňajúca $P^{-1}AP = B$. Súčin $P^{-1}AP$ sa nazýva *podobnostnou transformáciou* matice A.
- *Fundamentálny problém:* Pre danú štvorcovú maticu A nájsť jej najjednoduchší tvar dosiahnuteľný pomocou podobnostných transformácií.

Diagonalizovateľnosť

- Štvorcová matica A sa nazýva *diagonalizovateľná*, ak je A podobná diagonálnej matici.
- *Úplná sada vlastných vektorov* pre $A_{n\times n}$ je ľubovoľná sada n lineárne nezávislých vlastných vektorov matice A; takáto sada tvorí bázu $\mathbb{R}^n$, resp. $\mathbb{C}^n$. Nie všetky matice majú úplnú sadu vlastných vektorov; zvyknú sa niekedy nazývať aj ako *defektívne* matice.
- Matica $A_{n\times n}$ je diagonalizovateľná práve vtedy, keď má úplnú sadu vlastných vektorov. Navyše, $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ práve vtedy, keď stĺpce P tvoria kompletnú sadu vlastných vektorov a λ_j sú príslušné vlastné hodnoty, t.j. (λ_j, P_{*j}) tvoria pár vlastnej hodnoty a vlastného vektora pre maticu A.

Podobnosť zachováva vlastné hodnoty

Operácie riadkovej redukcie nezachovávajú vlastné hodnoty. Podobné matice však majú rovnaký charakteristický polynóm, a teda aj rovnaké vlastné hodnoty s násobnosťami. *Pozor!* Podobné matice nemusia mať rovnaké vlastné vektory, ich zmena súvisí s maticou podobnosti P.

** Schurova veta o triangularizácii

Každá štvorcová matica je unitárne podobná hornej trojuholníkovej matici. To znamená, že pre každú $A_{n\times n}$ existuje unitárna matica U (nie jednoznačná) a horná trojuholníková T (nie jednoznačná) také, že $U^*AU = T$. Diagonálne zložky T sú vlastnými hodnotami A.

Násobnosti

Pre $\lambda \in \sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s\}$ definujme:

- *Algebraická násobnosť* vlastnej hodnoty λ zodpovedá násobnosti λ ako koreňa charakteristického polynómu $\chi_A(x)$. Inými slovami, $alg\ mult_A(\lambda_i) = a_i$ práve vtedy, keď $(x-\lambda_1)^{a_1} \dots (x-\lambda_s)^{a_s} = 0$ je charakteristickou rovnicou matice A.
- Ak $alg\ mult_A(\lambda) = 1$, λ sa nazýva *jednoduchou* vlastnou hodnotou matice A.
- *Geometrická násobnosť* vlastnej hodnoty λ je $\dim \mathcal{N}(A - \lambda I)$. Inými slovami, $geo\ mult_A(\lambda)$ zodpovedá najväčšiemu počtu lineárne nezávislých vlastných vektorov prislúchajúcich k vlastnej hodnote λ.
- Vlastné hodnoty, pre ktoré $alg\ mult_A(\lambda) = geo\ mult_A(\lambda)$, sa nazývajú *polo-jednoduché* (semisimple) vlastné hodnoty matice A.

Nerovnosť násobností

Pre každú maticu $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ a pre každé $\lambda \in \sigma(A)$ platí:

$$geo\ mult_A(\lambda) \leq alg\ mult_A(\lambda).$$

Lineárna nezávislosť vlastných vektorov

Nech $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ sú navzájom rôzne vlastné hodnoty matice A.

- Ak $\{(\lambda_1, x_1), (\lambda_2, x_2), \dots, (\lambda_k, x_k)\}$ je množina párov vlastná hodnota – vlastný vektor, potom je $\mathcal{S} = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ lineárne nezávislá množina.
- Ak je $\mathcal{B}_i$ bázou $\mathcal{N}(A - \lambda_i I)$, potom je $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \dots \cup \mathcal{B}_k$ lineárne nezávislá množina.

Diagonalizovateľnosť a násobnosti

Matica A typu $n \times n$ je diagonalizovateľná práve vtedy, keď

$$geo\ mult_A(\lambda) = alg\ mult_A(\lambda)$$

pre každé $\lambda \in \sigma(A)$, teda práve vtedy, keď je každá jej vlastná hodnota polojednoduchá.

Rôzne vlastné hodnoty

Ak žiadna z vlastných hodnôt matice A nie je viacnásobná, potom je A diagonalizovateľná. *Upozornenie!* Opak nemusí platiť.

* Spektrálna veta pre diagonalizovateľné matice

Matica $A_{n\times n}$ so spektrom $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ je diagonalizovateľná práve vtedy, ak existujú matice $\{G_1, G_2, \dots, G_k\}$ spĺňajúce

$$A = \lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 + \dots + \lambda_k G_k,$$

pričom G_i majú nasledujúce vlastnosti:

- G_i je projekčná matica na $\mathcal{N}(A - \lambda_i I)$ v smere $\mathcal{R}(A - \lambda_i I)$.
- $G_i G_j = 0$ pre $i \neq j$.
- $G_1 + G_2 + \dots + G_k = I$.

Takýto rozklad sa nazýva *spektrálny rozklad matice* A a G_i sa nazývajú *spektrálne projektory* prislúchajúce A.

* Jednoduché vlastné hodnoty a projektory

Ak x a $y*$ sú pravé a ľavé vlastné vektory prislúchajúce jednoduchej vlastnej hodnote $\lambda \in \sigma(A)$, potom

$$G = \frac{xy^*}{y^*x}$$

je projektor na $\mathcal{N}(A - \lambda I)$ v smere $\mathcal{R}(A - \lambda I)$, teda G je spektrálny projektor prislúchajúci vlastnej hodnote λ.

Súhrn diagonalizovateľnosti

Pre $n \times n$ maticu A so spektrom $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ sú nasledujúce podmienky ekvivalentné:

- A je podobná diagonálnej matici, t.j. $P^{-1}AP = D$.
- A má úplnú sadu lineárne nezávislých vlastných vektorov.
- Každá vlastná hodnota λ_i je polojednoduchá, t.j. $\textit{geo mult}_A(\lambda_i) = \textit{alg mult}_A(\lambda_i)$.
- $A = \lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 + \cdots + \lambda_k G_k$, kde
  - ▷ G_i je projektor na $\mathcal{N}(A - \lambda_i I)$ v smere $\mathcal{R}(A - \lambda_i I)$,
  - ▷ $G_i G_j = 0$ pre $i \neq j$,
  - ▷ $G_1 + G_2 + \cdots + G_k = I$,
  - ▷ $G_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} (A - \lambda_j I) / \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} (\lambda_i - \lambda_j)$,
  - ▷ Ak λ_i je jednoduchá vlastná hodnota, ktorej prislúchajú pravý a ľavý vlastný vektor x, resp. y^*, potom $G_i = xy^*/y^*x$.

** Funkcie diagonalizovateľných matíc

Nech $A = PDP^{-1}$ je diagonalizovateľná matica, v ktorej sú vlastné hodnoty v $D = \operatorname{diag}(\lambda_1 I, \lambda_2 I, \dots, \lambda_k I)$ zlúčené pri opakovaní. Pre funkciu $f(z)$, ktorá je definovaná pre každé $\lambda_i \in \sigma(A)$, definujme

$$\begin{aligned} f(A) = Pf(D)P^{-1} &= P \begin{pmatrix} f(\lambda_1)I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f(\lambda_2)I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f(\lambda_k)I \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= f(\lambda_1)G_1 + f(\lambda_2)G_2 + \cdots + f(\lambda_k)G_k, \end{aligned}$$

kde G_i je i-ty spektrálny projektor prislúchajúci vlastnej hodnote λ_i.

** Nekonečné rady

Ak $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ konverguje pre $|z - z_0| < r$ a ak $|\lambda_i - z_0| < r$ pre každú vlastnú hodnotu diagonalizovateľnej matice A, potom

$$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (A - z_0 I)^n.$$

Navyše sa dá ukázať, že maticový rad na pravej strane konverguje práve vtedy, keď $|\lambda_i - z_0| < r$ pre každé λ_i, bez ohľadu na to, či je alebo nie je matica A diagonalizovateľná. Preto takýto rad slúži ako definícia $f(A)$ pre funkcie, ktoré sa dajú vyjadriť pomocou Taylorovho radu bez ohľadu na diagonalizovateľnosť matice A.

* Spektrálne projektory

Ak je A diagonalizovateľná a $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\}$, potom sa dá spektrálny projektor na $\mathcal{N}(A - \lambda_i I)$ v smere $\mathcal{R}(A - \lambda_i I)$ vyjadriť ako

$$G_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} (A - \lambda_j I) / \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} (\lambda_i - \lambda_j), \qquad \text{pre} \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Následne, ak je $f(z)$ definovaná na $\sigma(A)$, potom $f(A) = \sum_{i=1}^{k} f(\lambda_i) G_i$ je nejaký polynóm v A stupňa nanajvýš $k - 1$.

** Diferenciálne rovnice

Ak $A_{n\times n}$ je diagonalizovateľná so spektrom $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\}$, potom riešenie lineárnej diferenciálnej rovnice $u' = Au$ s počiatočnou podmienkou $u(0) = c$ sa dá vyjadriť ako

$$u(t) = e^{At} c = e^{\lambda_1 t} v_1 + e^{\lambda_2 t} v_2 + \cdots + e^{\lambda_k t} v_k,$$

kde v_i je vlastný vektor získaný i-tym spektrálnym projektorom G_i: $v_i = G_i c$.

* Stabilita

Majme systém $u' = Au$, $u(0) = c$, kde A je diagonalizovateľná s vlastnými hodnotami λ_i.

- Ak $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$ pre každé i, potom $\lim_{t\to\infty} e^{At} = 0$ a $\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$ pre každý počiatočný stav c. V takomto prípade sa systém $u' = Au$ nazýva *stabilný systém* a A sa nazýva *stabilná matica.*
- Ak $\mathrm{Re}(\lambda_i) > 0$ pre nejaké i, potom zložky $u(t)$ môžu byť neohraničené pre $t \to \infty$. V takom prípade hovoríme o *nestabilnom systéme* $u' = Au$, resp. *nestabilnej matici* A.
- Ak $\mathrm{Re}(\lambda_i) \leq 0$ pre každé i, potom zložky $u(t)$ zostávajú ohraničené pre všetky t, ale môžu oscilovať a nemusia konvergovať k žiadnej limite. Takýto systém sa zvykne nazývať *neutrálne stabilný* (Meyer ho nazýva polo-stabilný).

** Unitárna diagonalizácia

Matica $A_{n\times n}$ je unitárne podobná diagonálnej matici (t.j. A má úplnú sadu ortonormálnych vlastných vektorov) práve vtedy, keď $A^*A = AA^*$. Matice spĺňajúce túto rovnosť sa nazývajú *normálne.*

- Ak $U^*AU = D$, kde U je unitárna a D diagonálna, stĺpce U tvoria úplnú sadu ortonormálnych vlastných vektorov matice A a diagonálne zložky matice D sú príslušné vlastné hodnoty.

* Vlastnosti normálnych matíc

Ak A je normálna matica so spektrom $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\}$, tak

- A je tzv. RPN matica – t.j. $\mathcal{R}(A) \perp \mathcal{N}(A)$ (jej obraz je kolmý na nulový priestor, str. 408)
- Vlastné vektory zodpovedajúce rôznym vlastným hodnotám sú navzájom kolmé, t.j.

$$\mathcal{N}(A - \lambda_i I) \perp \mathcal{N}(A - \lambda_j I) \qquad \text{pre } \lambda_i \neq \lambda_j.$$

- Vety o spektrálnej projekcii (str. 517, 526) stále platia, ale spektrálne projektory G_i na $\mathcal{N}(A - \lambda_i I)$ v smere $\mathcal{R}(A - \lambda_i I)$ sú navyše v tomto prípade *ortogonálnymi* projektormi, lebo $\mathcal{R}(A - \lambda_i I) \perp \mathcal{N}(A - \lambda_i I)$ pre každé λ_i.

** Symetrické a hermitovské matice

Okrem vlastností, ktoré majú všetky normálne matice,

- reálne symetrické a hermitovské matice majú reálne vlastné hodnoty,
- A je reálna symetrická práve vtedy, keď je ortogonálne podobná reálnej diagonálnej matici D – t.j. $P^T AP = D$ pre nejakú ortogonálnu maticu P,
- reálne antisymetrické a antihermitovské matice majú rýdzo imaginárne vlastné hodnoty.

* Courantova-Fischerova veta

Vlastné hodnoty $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ hermitovskej matice $A_{n\times n}$ spĺňajú

$$\lambda_i = \max_{\dim \mathcal{V}=i} \min_{\substack{x\in\mathcal{V} \\ \|x\|_2=1}} x^* Ax \qquad \text{a} \qquad \lambda_i = \min_{\dim \mathcal{V}=n-i+1} \max_{\substack{x\in\mathcal{V} \\ \|x\|_2=1}} x^* Ax.$$

Ak $i = 1$ v mini-maxová formuli alebo $i = n$ v max-minimovej formuli, podpriestor $\mathcal{V}$ je celé $\mathbb{C}^n$, čiže najväčšia a najmenšia vlastná hodnota predstavujú extremálne hodnoty *Rayleighovho podielu* x^*Ax/x^*x.

** Singulárne hodnoty a vlastné hodnoty

Pre $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ hodnosti r platia nasledujúce tvrdenia:

- Nenulové vlastné hodnoty A^*A a AA^* sa rovnajú a sú kladné.
- Nenulové singulárne hodnoty matice A sú (kladné) odmocniny z nenulových vlastných hodnôt matice A^*A (a tiež AA^*).
- Ak je A normálna s nenulovými vlastnými hodnotami $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r\}$, potom nenulové singulárne hodnoty A sú $\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \ldots, |\lambda_r|\}$.
- Pravé a ľavé singulárne vektory matice A sú špeciálne zvolené vlastné vektory matice A^*A, resp. AA^*.
- Každá úplná sada ortonormálnych vlastných vektorov v_i matice A^*A môže slúžiť ako kompletná sada pravých singulárnych vektorov matice A, a potom ľavé singulárne vektory sú $u_i = Av_i/\|Av_i\|_2$, pre $i = 1, 2, \ldots, r$ a $\{u_{r+1}, u_{r+2}, \ldots, u_m\}$ je nejaká ortonormálna báza $\mathcal{N}(A^*)$. Podobne, každá úplná sada ortonormálnych vektorov AA^* môže poslúžiť ako sada ľavých singulárnych vektorov pre A, pričom sa príslušné pravé singulárne vektory dodefinujú analogicky.
- Hermitovská matica $B = \begin{pmatrix} 0_{m\times m} & A \\ A^* & 0_{n\times n} \end{pmatrix}$ typu $(m+n)\times(m+n)$ má nenulové vlastné hodnoty $\{\pm\sigma_1, \pm\sigma_2, \ldots, \pm\sigma_r\}$, kde $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r\}$ sú nenulové singulárne hodnoty matice A.

Kladne definitné matice

Pre reálnu symetrickú maticu $A_{n\times n}$ sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné a každé z nich môže slúžiť ako definícia jej *kladnej definitnosti.*

- $x^T Ax > 0$ pre každý nenulový $x \in \mathbb{R}^n$ (toto sa spravidla berie ako definícia).
- Všetky vlastné hodnoty matice A sú kladné.
- $A = B^T B$ pre nejakú regulárnu maticu $B_{n\times n}$.
  - ▷ Aj keď takáto B nie je jednoznačná, existuje jediná *horná trojuholníková* matica R s kladnou diagonálou spĺňajúca $A = R^T R$. Toto je *Choleského faktorizácia* matice A.
- A má LU rozklad (alebo LDU), v ktorom sú všetky pivoty kladné.
  - ▷ LDU rozklad má tvar $A = LDU = LDL^T = R^T R$, kde $R = D^{1/2}L^T$ je *Choleského faktor* matice A.
- Vedúce hlavné minory (determinanty ľavých horných podmatíc) matice A sú kladné.
- Všetky hlavné minory matice A sú kladné.

Pre hermitovské matice nahradiť transpozíciu $(\cdot)^T$ hermitovským združením $(\cdot)^*$ a $\mathbb{R}$ poťom $\mathbb{C}$.

Kladne semidefinitné matice

Pre reálnu symetrickú maticu $A_{n\times n}$ s hodnosťou $h(A) = r$ sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné a každé z nich môže slúžiť ako definícia jej *kladnej semi-definitnosti.*

- $x^T Ax \geq 0$ pre každý nenulový $x \in \mathbb{R}^n$ (toto sa spravidla berie ako definícia).
- Všetky vlastné hodnoty matice A sú nezáporné.
- $A = B^T B$ pre nejakú maticu B s $h(B) = r$.
- Všetky hlavné minory matice A sú nezáporné.

Kvadratické formy

Pre vektor $x \in \mathbb{R}^n$ a maticu $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ sa skalárna funkcia

$$f(x) = x^T Ax = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$$

nazýva *kvadratická forma.* Kvadratická forma sa nazýva *kladne definitná*, ak A je kladne definitná matica. Inými slovami, $f(x)$ je kladne definitná vtedy, keď $f(x) > 0$ pre $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$.

Sylvestrov zákon zotrvačnosti

Nech $A \cong B$ označuje fakt, že reálne symetrické matice A a B sú kongruentné (t.j. $C^T AC = B$ pre nejakú regulárnu C). Sylvestrov zákon zotrvačnosti hovorí:

$$A \cong B \qquad \text{práve vtedy, keď } A \text{ a } B \text{ majú rovnakú signatúru.}$$

* Jordanov tvar nilpotentnej matice

Každá nilpotentná matica $L_{n\times n}$ indexu k je podobná blokovo diagonálnej matci

$$P^{-1}LP = N = \begin{pmatrix} N_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & N_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & N_t \end{pmatrix},$$

ktorej každý blok N_j je nilpotentná matica s jednotkami na prvej vedľajšej diagoále a nulami inde.

- Počet blokov v N je daný ako $t = \dim \mathcal{N}(L)$.
- Veľkosť najväčšieho bloku v N je $k \times k$.
- Počet blokov veľkosti $i \times i$ v N je $\nu_i = r_{i-1} - 2r_i + r_{i+1}$, kde $r_i = h(L^i)$.
- Ak $\mathcal{B} = \mathcal{S}_{k-1} \cup S_{k-2} \cup \dots \cup S_0 = \{b_1, b_2, \dots, b_t\}$ je báza priestoru $\mathcal{N}(L)$ získaná z do seba vnorených podpriestorov $\mathcal{M}_i = \mathcal{R}(L^i) \cap \mathcal{N}(L)$, potom
  - ▷ množina vektorov $\mathcal{J} = \mathcal{J}_{b_1} \cup \mathcal{J}_{b_2} \cup \dots \cup \mathcal{J}_{b_t}$ obsahujúca všetky Jordanove reťazce so začiatkami v b_1, b_2, …, b_t tvorí bázu $\mathbb{C}^n$;
  - ▷ matica podobnosti $P_{n\times n} = [J_1|J_2|\dots|J_t]$ je regulárna matica obsahujúca ako stĺpce Jordanove reťazce v poradí, v akom sú v $\mathcal{I}$.

Jednoznačnosť Jordanovej štruktúry

Štruktúra Jordanovho tvaru pre nilpotentú maticu $L_{n\times n}$ indexu k je pre maticu L jednoznačne určená – teda ak je L podobná blokovo diagonálnej $B = \operatorname{diag}(B_1, B_2, \dots, B_t)$, kde každa B_i má tvar

$$B_i = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon_i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_i & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \epsilon_i \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{pre} \quad \epsilon_i \neq 0,$$

potom musí platiť $t = \dim \mathcal{N}(L)$ a počet blokov veľkosti $i \times i$ musí byť $r_{i-1} - 2r_i + r_{i+1}$, kde $r_i = h(L^i)$.

Index vlastnej hodnoty

Index vlastnej hodnoty λ matice $A\ in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ je definovaný ako index matice $(A - \lambda I)$. Inými slovami, *index*(λ) je najmenšie kladné celé číslo k pre ktoré platia nasledujúce ekvivalentné tvrdenia.

- $h\left((A-\lambda I)^k\right) = h\left((A-\lambda I)^{k+1}\right)$.
- $\mathcal{R}\left((A-\lambda I)^k\right) = \mathcal{R}\left((A-\lambda I)^{k+1}\right)$.
- $\mathcal{N}\left((A-\lambda I)^k\right) = \mathcal{N}\left((A-\lambda I)^{k+1}\right)$.
- $\mathcal{R}\left((A-\lambda I)^k\right) \cap \mathcal{N}\left((A-\lambda I)^k\right) = \{0\}$.
- $\mathbb{C}^n = \mathcal{R}\left((A-\lambda I)^k\right) \oplus \mathcal{N}\left((A-\lambda I)^k\right)$.

Ak $\mu \notin \sigma(A)$, definujeme *index*$(\mu) = 0$.

Jordanov tvar

Pre každú $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ s rôznymi vlastnými hodnotami $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s\}$ existuje regulárna matica P taká, že

$$P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} J(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J(\lambda_s) \end{pmatrix}.$$

- J má jeden *Jordanov segment* (úsek ?) $J(\lambda_j)$ pre každú vlastnú hodnotu $\lambda_j \in \sigma(A)$.
- Každý segment $J(\lambda_j)$ je tvorený $t_j = \dim \mathcal{N}(A - \lambda_j I)$ Jordanovými blokmi:

$$J(\lambda_j) = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_j) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2(\lambda_j) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{t_j}(\lambda_j) \end{pmatrix}, \quad \text{kde} \quad J_*(\lambda_j) = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_j \end{pmatrix}.$$

- Najväčší Jordanov blok v $J(\lambda_j)$ má veľkosť $k_j \times k_j$, kde $k_j = \mathit{index}(\lambda_j)$.
- Počet $i \times i$ Jordanových blokov v $J(\lambda_j)$ je daný ako

$$\nu_i(\lambda_j) = r_{i-1}(\lambda_j) - 2r_i(\lambda_j) + r_{i+1}(\lambda_j), \quad \text{kde} \quad r_i(\lambda_j) = h\left((A - \lambda_j I)^i\right).$$

- Matica J sa nazýva *Jordanov tvar* matice A. Štruktúra tohto tvaru je jednoznačná, teda počet Jordanových segmentov v J, ako aj počty a veľkosti Jordanových blokov v každom zo segmentov sú určené zložkami A. Navyše každá matica podobná amtici A má rovnaký Jordanov tvar – t.j. $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ sú podobné práve vtedy, keď A a B majú rovnakú Jordanov tvar (štruktúru). Matica podobnosti P obsahujúca reťazce zovšeobecnených vlastných vektorov nie je jednoznačná.

Konštrukcia Jordanovych reťazcov

Pre každú $\lambda \in \sigma(A)$ označme $\mathcal{M}_i = \mathcal{R}((A - \lambda I)^i) \cap \mathcal{N}(A - \lambda I)$ pre $i = k-1, k-2, \dots, 0$, kde $k = \mathit{index}(\lambda)$.

- Vytvorme bázu $\mathcal{B}$ priestoru $\mathcal{N}(A - \lambda I)$.
  - ▷ Začínajúc s ľubovoľnou bázou $\mathcal{S}_{k-1}$ priestoru $\mathcal{M}_{k-1}$, ju postupne rozširujme množinami $\mathcal{S}_{k-2}$, $\mathcal{S}_{k-3}$, …, $\mathcal{S}_0$ tak, aby

    $$\begin{array}{ll} \mathcal{S}_{k-1} & \text{bola bázou } \mathcal{M}_{k-1}, \\ \mathcal{S}_{k-1} \cup \mathcal{S}_{k-2} & \text{bola bázou } \mathcal{M}_{k-2}, \\ \mathcal{S}_{k-1} \cup \mathcal{S}_{k-2} \cup \mathcal{S}_{k-3} & \text{bola bázou } \mathcal{M}_{k-3}, \end{array}$$

    atď., až pokým nedostaneme bázu $\mathcal{B} = \mathcal{S}_{k-1} \cup \mathcal{S}_{k-2} \cup \dots \cup \mathcal{S}_0 = \{b_1, b_2, \dots, b_t\}$ pre $\mathcal{M}_0 = \mathcal{N}(A - \lambda I)$.
- Vytvorme Jordanov reťazec začínajúci sa v každom z vlastných vektorov $b_* \in \mathcal{B}$.
  - ▷ Pre každý vlastný vektor $b_* \in \mathcal{S}_i$ riešme $(A - \lambda I)^i x_* = b_*$ (tento systém je nutne konzistentný, lebo $b^* \in \mathcal{R}((A - \lambda I)^i)$). Reťazec zovšeobecnených vlastných vektorov začínajúci v b_* bude
    $P_* = \left[\ (A - \lambda I)^i x_* \mid (A - \lambda I)^{i-1} x_* \mid \dots \mid (A - \lambda I) x_* \mid x_*\ \right]_{n\times(i+1)}$.
  - ▷ Každá takáto P_* zodpovedá jednému Jordanovmu bloku $J_*(\lambda)$ v Jordanovom segmente $J(\lambda)$ zodpovedajúcemu λ.
  - ▷ Prvý stĺpec v P_* je vlastný vektor a nasledujúce stĺpce sú zovšeobecnené vlastné vektory; ich rády postupne narastajú.
- Ak zo všetkých takých P_* pre dané $\lambda_j \in \sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s\}$ vytvoríme maticu P_j, a ak $P = [P_1 | P_2 | \dots | P_s]$, potom P je regulárna matica spĺňajúca $P^{-1}AP = J = \operatorname{diag}(J(\lambda_1), J(\lambda_2), \dots, J(\lambda_s))$, t.j. matica P predstavuje maticu podobnosti medzi A a jej Jordanovym tvarom J.

* Funkcie Jordanovych blokov

Pre $k \times k$ Jordanov blok J_* s vlastnou hodnotou λ a pre funkciu $f(z)$, pre ktorú sú definované $f(\lambda)$, $f'(\lambda)$, $\ldots$, $f^{(k-1)}(\lambda)$, je $f(J_*)$ definované ako

$$f(J_*) = f\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \frac{f''(\lambda)}{2!} & \ldots & \frac{f^{(k-1)}(\lambda)}{(k-1)!} \\ & f(\lambda) & f'(\lambda) & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{f''(\lambda)}{2!} \\ & & & f(\lambda) & f'(\lambda) \\ & & & & f(\lambda) \end{pmatrix}.$$

* Maticové funkcie

Pre $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ so spektrom $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s\}$ označme $k_i = \mathit{index}(\lambda_i)$.

- Funkcia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je definovaná (resp. existuje) pre A, ak $f(\lambda_i)$, $f'(\lambda_i)$, $\ldots$, $f^{(k_i-1)}(\lambda_i)$ existujú pre každé $\lambda_i \in \sigma(A)$.
- Predpokladajme, že $A = PJP^{-1}$, kde $J = \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & J_* & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$ je Jordanov tvar a J_* reprezentuje rôzne Jordanove bloky. Ak f existuje pre A, potom hodnota f v A je definovaná ako
$$f(A) = Pf(J)P^{-1} = P\begin{pmatrix} \ddots & & \\ & f(J_*) & \\ & & \ddots \end{pmatrix}P^{-1}.$$

* Spektrálny rozvoj funkcie $f(A)$

Pre $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ so spektrom $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s\}$ a indexami $k_i = \mathit{index}(\lambda_i)$ a pre funkciu $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, pre ktorú existujú derivácie $f(\lambda_i)$, $f'(\lambda_i)$, $\ldots$, $f^{(k_i-1)}(\lambda_i)$ pre každé $\lambda_i \in \sigma(A)$ je hodnota $f(A)$ rovná

$$f(A) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=0}^{k_i-1} \frac{f^{(j)}(\lambda_i)}{j!}(A - \lambda_i I)^j G_i,$$

kde *spektrálne projektory* G_i spĺňajú

- G_i je projektor na zovšeobecnený vlastný priestor $\mathcal{N}((A-\lambda_i I)^{k_i})$ v smere $\mathbb{R}((A-\lambda_i I)^{k_i})$.
- $G_1 + G_2 + \cdots + G_s = I$.
- $G_i G_j = 0$ ak $i \neq j$.
- $N_i = (A - \lambda_i I)G_i = G_i(A - \lambda_i I)$ je nilpotentná s indexom k_i.
- Pre diagonalizovateľnú A sa tento rozvoj zhoduje s už skôr popísaným predpisom pre maticovú funkciu diagonalizovateľnej matice.

* Konvergenica k nule

Pre $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ je $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0$ práve vtedy, keď $\rho(A) < 1$.

* Neumannove rady

Pre $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné.

- Neumannov rad $I + A + A^2 + \dots$ konverguje.
- $\rho(A) < 1$.
- $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0$.

Za týchto podmienok $(I - A)^{-1}$ existuje a rovná sa $\sum_{k=0}^{\infty} A^k = (I - A)^{-1}$.

* Lineárne stacionárne iterácie

Nech $Ax = b$ je lineárny systém s ľubovoľnou štvorcovou maticou.

- *Splitting* (štiepenie?) matice A je rozklad $A = M - N$, pre ktorý existuje M^{-1}.
- Potom $H = M^{-1}N$ sa nazýva *iteračná matica.* Tiež zvoľme $d = M^{-1}b$.
- Pre počiatočný vektor $x(0)$ je *lineárne stacionárne iterovanie* reprezentované rekurentným predpisom
$$x(k) = Hx(k-1) + d, \qquad \text{pre} \qquad k = 1, 2, 3, \dots.$$
- Ak $\rho(H) < 1$, potom je A regulárna a
$$lim_{k\to\infty} x(k) = x = A^{-1}b \qquad \text{pre každý počiatočný vektor } x(0).$$

* Limity mocnín

Pre $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ limita $\lim\limits_{k\to\infty} A^k$ existuje práve vtedy, keď

$$\begin{aligned} &\rho(A) < 1 \\ &\text{alebo} \\ &\rho(A) = 1, \quad \text{pričom } \lambda = 1 \text{ je jediná vlastná hodnota ležiaca na} \\ &\qquad\qquad\quad \text{jednotkovej kružnici a jej index je 1 (t.j. je polojednoduchá)} \end{aligned}$$

Ak táto limita existuje,

$$\lim_{k\to\infty} A^k = \text{projektor na } \mathcal{N}(I - A) \text{ v smere } \mathcal{R}(I - A).$$

* Cesàrova sumovateľnosť

- Matica $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ je cesàrovsky sumovateľná práve vtedy, keď $\rho(A) < 1$ alebo ak $\rho(A) = 1$ a každá jej vlastná hodnota ležiaca na jednotkovej kružnici je polojednoduchá.
- Ak existuje, Cesàrova limita
$$\lim_{k\to\infty} \frac{I + A + \dots + A^{k-1}}{k} = G$$
predstavuje projektor na $\mathcal{N}(I - A)$ v smere $\mathcal{R}(I - A)$.
- $G \neq 0$ práve vtedy, keď $1 \in \sigma(A)$. V tom prípade je G spektrálny projektor pre $\lambda = 1$.
- Ak postupnosť $\{A^k\}_{k=0}^{\infty}$ konverguje ku G, potom je A aj cesàrovsky sumovateľná do G. Opačné tvrdenie ale neplatí – napr. $A = -I$.

* Projektory

Ak je $M_{n\times n} = B_{n\times r}C_{r\times n}$ ľubovoľná faktorizácia matice M s hodnosťou r a ak sú priestory $\mathcal{R}(M)$ a $\mathcal{N}(M)$ komplementárne v $\mathbb{C}^n$, potom projektor na $\mathcal{R}(M)$ v smere $\mathcal{N}(M)$ je daný predpisom

$$P = B(CB)^{-1}C,$$

resp.

$$P = U_1(V_1^*U_1)^{-1}V_1, \qquad \text{ak sa používa nejaký } URV \text{ rozklad.}$$

Ak A konverguje alebo je sumovateľná do G a ak $I - A = BC$ je faktorizácia s plnou hodnosťou, potom

$$G = I - B(CB)^{-1}C,$$

resp.

$$G = I - U_1(V_1^*U_1)^{-1}V_1, \qquad \text{ak sa používa nejaký } URV \text{ rozklad.}$$

Pozn.: Tieto vzorce sú zovšeobecnením podobného vzorca pre maticu ortogonálnej projekcie $P = A(A^TA)^{-1}A^T$ na $\mathcal{R}(A)$ v smere $\mathcal{N}(A^T) = \mathcal{R}(A)^\perp$.

Minimálny polynóm matice

Existuje jediný monický polynóm nulujúci maticu A najnižšieho stupňa. Takýto polynóm, značený $m(x)$, sa nazýva *minimálny polynóm* matice A. Cayley-Hamiltonova veta zaručuje, že $\deg(m(x)) \leq n$.

Vlastnosti minimálneho polynómu

Nech $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ so spektrom $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s\}$.

- Minimálny polynóm matice A je jediný monický polynóm $m(x)$ najnižšieho stupňa spĺňajúci $m(A) = 0$.
- $m(x) = (x - \lambda_1)^{k_1}(x - \lambda_2)^{k_2} \ldots (x - \lambda_s)^{k_s}$, kde $k_j = index(\lambda_j)$.
- $m(x)$ delí každý polynóm $p(x)$, pre ktorý $p(A) = 0$. Špeciálne, $m(x)$ delí charakteristický polynóm $\chi(x)$.
- $m(x) = \chi(x)$ práve vtedy, keď $geo\ mult_A(\lambda_j) = 1$ pre každé λ_j. Ekvivalentne, $alg\ mult_A(\lambda_j) = index(\lambda_j)$ pre každé j.
- Matica A je diagonalizovateľná práve vtedy, keď $m(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)\ldots(x - \lambda_s)$, t.j. vtedy, keď je $m(x)$ súčinom navzájom rôznych lineárnych členov.

* Krylovove postupnosti, podpriestory a matice

Pre $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ a $0 \neq b \in \mathbb{C}^n$ definujeme:

- $\{b, Ab, A^2b, \ldots, A^{j-1}b\}$ sa nazýva *Krylovova postupnosť*.
- $\mathcal{K}_j = \operatorname{span}\{b, Ab, \ldots, A^{j-1}b\}$ je *Krylovov podpriestor*.
- $K_{n\times j} = (b|Ab|\ldots|A^{j-1}b)$ sa nazýva *Krylovova matica*.

* Minimálny polynóm vektora

- *Minimálny polynóm* vektora $b \in \mathbb{C}^n$ vzhľadom na $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ je monický polynóm $v(x)$ najnižšieho stupňa, pre ktorý $v(A)b = 0$.
- Ak A^kb je prvý vektor v Krylovovej postupnosti $\{b, Ab, A^2b, \ldots\}$, ktorý je lineárnou kombináciou predchádzajúcich Krylovovych vektorov, povedzme $A^k = \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j A^j b$, potom $v(x) = x^k - \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j x^j$ (resp. $v(x) = 1$ pre $b = 0$) je minimálny polynóm b vzhľadom na A.

* Minimálny polynóm ako NSN

Nech $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ a $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ je ľubovoľná báza $\mathbb{C}^n$. Ak $v_i(x)$ je minimálnym polynómom b_i vzhľadom na A, potom minimálny polynóm $m(x)$ matice A je najmenší spoločný násobok polynómov $v_1(x), v_2(x), \ldots, v_n(x)$.

* Pridružená matica polynómu

Pre každý monický polynóm $p(x) = x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$ je jeho *pridružená matica*:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -\alpha_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & 0 & -\alpha_{n-2} \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}_{n\times n}.$$

- Polynóm $p(x)$ je súčasne charakteristickým aj minimálnym polynómom matice C.

** Kladná vlastná hodnota a kladný vlastný vektor

Ak $A_{n\times n} > 0$, potom platí:

- $\rho(A) \in \sigma(A)$.
- Ak $Ax = \rho(A)x$, potom $A|x| = \rho(A)|x|$ a $|x| > 0$.

Inými slovami, kladná matica A má (reálnu) vlastnú hodnotu $\rho(A)$, ktorej prislúcha kladný vlastný vektor $v > 0$.

** Index $\rho(A)$

Ak $A_{n\times n} > 0$, potom platí:

- $\rho(A)$ je jediná vlastná hodnota matice A na jej spektrálnej kružnici.
- $index(\rho(A)) = 1$, t.j. $\rho(A)$ je polo-jednoduchá vlastná hodnota – jej geometrická násobnosť sa rovná algebraickej, a teda zodpovedajúce Jordanove bloky sú veľkosti 1×1.

** Násobnosť $\rho(A)$

Ak $A_{n\times n} > 0$, potom $alg\ mult_A(\rho(A)) = 1$. Inými slovami, spektrálny polomer je jednoduchou vlastnou hodnotou matice A, preto $\dim \mathcal{N}(A - \rho(A)I) = geo\ mult_A(\rho(A)) = alg\ mult_A(\rho(A)) = 1$.

** Žiadne ďaľšie kladné vlastné vektory

Pre kladnú maticu $A_{n\times n} > 0$ neexistuje iný nezáporný vlastný vektor okrem Perronovho vektora a jeho kladných násobkov

* Collatzova-Wielandtova veta

Perronov koreň matice $A_{n\times n} > 0$ maximalizuje výraz $r = \max_{x\in\mathcal{N}} f(x)$, kde

$$f(x) = \min_{\substack{1\le i\le n \\ x_i \ne 0}} \frac{[Ax]_i}{x_i} \qquad \text{a} \qquad \mathcal{N} = \{x \mid x \ge 0 \text{ a } x \ne 0\}.$$

** Perronova veta

Ak $A_{n\times n} > 0$ a $r = \rho(A)$, potom platí:

- $r > 0$.
- $r \in \sigma(A)$ (r sa nazýva Perronov koreň).
- *alg mult*$_A(\rho(A)) = 1$.
- Existuje vlastný vektor $x > 0$, pre ktorý $Ax = rx$.
- *Perronov vektor* je jednoznačne určený vektor, spĺňajúci
$$Ap = rp, \quad p > 0, \quad \text{a} \quad \|p\|_1 = 1.$$
Okrem jeho kladných násobkov neexistujú žiadne nezáporné vlastné vektory pre maticu A, bez ohľadu na vlastnú hodnotu.
- r je jediná vlastná hodnota na spektrálnej kružnici matice A.
- $r = \max_{x\in\mathcal{N}} f(x)$ (Collatzova-Wielandtova formula),
kde $f(x) = \min_{\substack{1\le i\le n\\ x_i\neq 0}} \frac{[Ax]_i}{x_i}$ a $\mathcal{N} = \{x \,|\, x \geq 0 \text{ a } x \neq 0\}$.

* Nezáporný vlastný pár

Pre $A_{n\times n} \geq 0$ s $r = \rho(A)$ platia nasledujúce tvrdenia.

- $r \in \sigma(A)$, (aj možnosť $r = 0$ je prípustná).
- $Az = rz$ pre nejaké $z \in \mathcal{N} = \{x \,|\, x \geq 0 \text{ a } x \neq 0\}$.
- $r = \max_{x\in\mathcal{N}} f(x)$, kde $f(x) = \min_{\substack{1\le i\le n\\ x_i\neq 0}} \frac{[Ax]_i}{x_i}$, (t.j. Collatz-Wielandtova formula naďalej platí).

* Reducibilita a grafy

- Matica $A_{n\times n}$ sa nazýva *reducibilná*, ak existuje permutačná matica P, pre ktorú
$$P^TAP = \begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{pmatrix}, \qquad \text{kde } X \text{ a } Z \text{ sú obe štvorcové.}$$
Inak sa A nazýva *ireducibilná*.
- P^TAP sa nazýva *symetrická permutácia* matice A. Dostaneme ju tak, že riadky matice A vymeníme rovnako ako jej stĺpce.
- *Graf* $\mathcal{G}(A)$ matice A je orientovaný graf s n vrcholmi $N_1, N_2, \ldots, N_n$, v ktorom sa nachádza orientovaná hrana z N_i do N_j práve vtedy, keď $a_{ij} \neq 0$.
- $\mathcal{G}(P^TAP) = \mathcal{G}(A)$ pre ľubovoľnú permutačnú maticu P – účinok symertickej permutácie je len prečíslovanie vrcholov grafu.
- $\mathcal{G}(A)$ sa nazýva *silno súvislý*, ak pre každú dvojicu vrcholov (N_i, N_k) existuje postupnosť orientovaných hrán vedúca z N_i do N_k
- Matica A je ireducibilná práve vtedy, keď je graf $\mathcal{G}(A)$ silno súvislý.

* Prevod nezápornosti a regularity na kladnosť

Ak je $A_{n\times n} \geq 0$ ireducibilná, potom $(I + A)^{n-1} > 0$.

* Perron-Frobeniova veta

Ak je $A_{n\times n} \geq 0$ ireducibilná, potom platí:

- $r = \rho(A) \in \sigma(A)$ a $r > 0$.
- *alg mult*$_A(r) = 1$.
- Existuje vlastný vektor $x > 0$, pre ktorý $Ax = rx$.
- *Perronov vektor* je jednoznačne určený vektor, spĺňajúci
$$Ap = rp, \quad p > 0, \quad \text{a} \quad \|p\|_1 = 1.$$
Okrem jeho kladných násobkov neexistujú žiadne nezáporné vlastné vektory pre maticu A, bez ohľadu na vlastnú hodnotu.
- Platí Collatzova-Wielandtova formula $r = \max_{x\in\mathcal{N}} f(x)$,
kde $f(x) = \min_{\substack{1\leq i\leq n\\ x_i\neq 0}} \frac{[Ax]_i}{x_i}$ a $\mathcal{N} = \{x \,|\, x \geq 0 \text{ a } x \neq 0\}$.

* Primitívne matice

- Nezáporná ireducibilná matica A, ktorá má jedinú vlastnú hodnotu $r = \rho(A)$ na svojej spektrálnej kružnici sa nazýva *primitívna*.
- Nezáporná ireducibilná matica A, ktorá má $h > 1$ vlastných hodnôt na svojej spektrálnej kružnici sa nazýva *neprimitívna*, číslo h sa nazýva *index (ne)primitivity*.
- Nezáporná ireducibilná matica A s $r = \rho(A)$ je primitívna práve vtedy, keď existuje $\lim_{k\to\infty}(A/r)^k$. V tom prípade
$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{A}{r}\right)^k = G = \frac{pq^T}{q^Tp} > 0,$$
kde p a q sú zodpovedajúce Perronove vektory pre A a A^T a G je spektrálny projektor na $\mathcal{N}(A - rI)$ pozdĺž $\mathcal{R}(A - rI)$.

* Wielandtova veta

Ak $|B| \leq A_{n\times n}$, pre A ireducibilnú, potom $\rho(B) \leq \rho(A)$. Ak platí rovnosť t.j. $\mu = e^{i\phi}\rho(A) \in \sigma(B)$ pre nejaké ϕ, potom

$$B = e^{i\phi}DAD^{-1} \qquad \text{pre nejakú diagonálnu maticu} \qquad D = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & & \\ & e^{i\theta_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{i\theta_n} \end{pmatrix},$$

a naopak.

* h-te odmocniny z $\rho(A)$ na spektrálnej kružnici

Ak je $A_{n\times n} \geq 0$ ireducibilná a má h vlastných hodnôt $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h\}$ na spektrálnej kružnici, potom platia nasledujúce tvrdenia.

- *alg mult*$_A(\lambda_k) = 1$ pre $k = 1, 2, \ldots, h$.
- Fázy vlastných hodnôt $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h\}$ zodpovedajú h-tym odmocninám z jednotky, t.j. pre $r = \rho(A)$ sú dané ako
$$\{r, r\omega, r\omega^2, \ldots, r\omega^{h-1}\}, \qquad \text{kde} \qquad \omega = e^{2\pi i/h}.$$

* Rotačná invariancia

Ak je matica A neprimitívna s h vlastnými hodnotami na spektrálnej kružnici, potom spektrum $\sigma(A)$ je invariantné vzhľadom na rotáciu o uhol $2\pi/h$ okolo počiatku. Žiadna rotácia o uhol menší ako $2\pi/h$ nemôže zachovávať $\sigma(A)$.

* Frobeniov test primitivity

$A \geq 0$ je primitívna práve vtedy, keď $A^m > 0$ pre nejaké $m > 0$.

* Index neprimitivity

Ak je $c(x) = x^n + c_{k_1}x^{n-k_1} + c_{k_2}x^{n-k_2} + \cdots + c_{k_s}x^{n-k_s} = 0$ charakteristická rovnica neprimitívnej matice $A_{n\times n}$, v ktorej sú vyznačené iba nenulové koeficienty (t.j. $c_{k_j} \neq 0$ a $n > (n-k_1) > \cdots > (n-k_s)$), potom je index neprimitivity h najväčší spoločný deliteľ $k_1, k_2, \ldots, k_s$.

* Frobeniov tvar

Pre každú neprimitívnu maticu A s indexom neprimitivity $h > 1$ existuje permutačná matica P taká, že

$$P^TAP = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & A_{h-1,h} \\ A_{h1} & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

kde nulové bloky na diagonále sú štvorcové.

* Ireducibilné markovovské reťazce

Nech P je matica pravdepodobností prechodu pre ireducibilný markovovský reťazec so stavmi $\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$, t.j. P je ireducibilná $n \times n$ stochastická matica. Označme π^T ľavostranný Perronov vektor pre P. Nasledujúce tvrdenia platia pre ľubovoľnú počiatočnú distribúciu $p^T(0)$.

- Matica prechodu o k krokov je P^k, lebo zložka (i,j) v P^k určuje prechod zo stavu S_i do stavu S_j na k krokov.
- Vektor distribúcie po k krokoch je daný ako $p^T(k) = p^TP^k$.
- Ak je P primitívna a ak e označuje stĺpcový vektor samých jednotiek, potom
$$\lim_{k\to\infty} P^k = e\pi^T \qquad a \qquad \lim_{k\to\infty} p^T(k) = \pi^T.$$
- Ak je P neprimitívna, potom
$$\lim_{k\to\infty} \frac{I + P + \cdots + P^{k-1}}{k} = e\pi^T$$
a
$$\lim_{k\to\infty} \left[\frac{p^T(0) + p^T(1) + \cdots + p^T(k-1)}{k}\right] = \pi^T.$$
- Bez ohľadu na to, či je P primitívna alebo neprimitívna, j-ta zložka π_j vektora π^T reprezentuje dlhodobý priemer podielu času, v ktorom sa systém nachádza v stave S_j.
- π^T sa často nazýva *vektor stacionárnej distribúcie* reťazca, lebo to je jediný distribučný vektor spĺňajúci $\pi^TP = \pi^T$.

* Jednotkové vlastné hodnoty

Jednotkové vlastné hodnoty stochastickej matice sú tie, ktoré ležia na jednotkovej kružnici. Pre každú stochastickú maticu P platí

- Každá jednotková vlastná hodnota matice P je polojednoduchá.
- Každá jednotková vlastná hodnota ma tvar $\lambda = e^{2k\pi i/h}$ pre nejaké $k < h \leq n$.
- Špeciálne, $\rho(P) = 1$ je vždy polojednoduchá vlastná hodnota matice P.

* Sumovateľnosť stochastických matíc

Každá stochastická matica P je cesàrovsky sumovateľná, t.j.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{I + P + \cdots + P^{k-1}}{k} \qquad \text{existuje pre každú stochastickú maticu } P$$

a hodnota limity je spektrálny projektor G na $\mathcal{N}(I - P)$ pozdĺž $\mathcal{R}(I - P)$.

* Reducibilné markovovské reťazce

Ak stavy v reducibilnom markovovskom reťazci boli usporiadané tak, že matica pravdepodobností prechodu má kanonický tvar

$$P = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11} & \dots & P_{1r} & P_{1,r+1} & \dots & P_{1m} \\ & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & P_{rr} & P_{r,r+1} & \dots & P_{rm} \\ & & & P_{r+1,r+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & P_{mm} \end{pmatrix}$$

a ak π_j^T sú ľavostranné Perronove vektory pre P_{jj}, $(r+1 \leq j \leq m)$, potom $I - T_{11}$ je regulárna a

$$\lim_{k\to\infty} \frac{I + P + \cdots + P^{k-1}}{k} = \begin{pmatrix} 0 & (I - T_{11})^{-1} T_{12} E \\ 0 & E \end{pmatrix},$$

kde

$$E = \begin{pmatrix} e\pi_{r+1}^T & & \\ & \ddots & \\ & & e\pi_m^T \end{pmatrix}.$$

Navyše, $\lim_{k\to\infty} P^k$ existuje práve vtedy, keď sú všetky stochastické matice $P_{r+1,r+1}, \dots, P_{mm}$ primitívne. V tom prípade

$$\lim_{k\to\infty} P^k = \begin{pmatrix} 0 & (I - T_{11})^{-1} T_{12} E \\ 0 & E \end{pmatrix}.$$