Podvádzanie pri skúške je vážnym porušením Študijného poriadku FMFI UK, ktoré môže viesť k vylúčeniu zo štúdia. Nerobte hlúposti. Počas písomky je zakázané používať mobilné telefóny a iné elektronické zariadenia. Veľa zdaru!

Skúška z Maticového počtu I., 15. január 2024

1. Pre maticu

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

nájdite jej spektrálny rozklad - t.j. spektrum $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\}$ a spektrálne projektory $G_1, G_2, \ldots, G_k$ tak, aby platila rovnosť $A = \lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 + \cdots + \lambda_k G_k$.

2. a) Ukážte, že ak $A_{m\times n} = Q_{m\times n} R_{n\times n}$ je QR-rozklad matice A, potom pre Frobeniove normy platí $\|A\|_F = \|R\|_F$.

b) Ukážte, že Frobeniova maticová norma na $M_{m\times n}(\mathbb{C})$ spĺňa rovnobežníkovú identitu, t.j. pre $m \times n$ matice A, B platí

$$2\left(\|A\|_F^2 + \|B\|_F^2\right) = \|A+B\|_F^2 + \|A-B\|_F^2.$$

3. Nech E je projektor na $\mathcal{X}_1$ v smere $\mathcal{Y}_1$ a F je projektor na $\mathcal{X}_2$ v smere $\mathcal{Y}_2$. Ukážte, že $E - F$ je projektor práve vtedy, keď $EF = FE = F$, a v tom prípade $\mathcal{R}(E-F) = \mathcal{X}_1 \cap \mathcal{Y}_2$ a $\mathcal{N}(E-F) = \mathcal{Y}_1 \oplus \mathcal{X}_2$.

Návod: P je projektor práve vtedy, keď je $(I - P)$ projektor.

4. Nech $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ je symetrická kladne definitná matica. Na konci prvého kroku Gaussovej eliminácie (bez čiastočného pivotovania) dostaneme

$$A_1 = \left[\begin{array}{c|ccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \hat{A} & \\ 0 & & & \end{array}\right].$$

a) Ukážte, že $\hat{A}$ je tiež symetrická kladne definitná matica.

b) Použite časť a) na dokázanie existencie LU-, resp. Choleského rozkladu pre ľubovoľnú symetrickú kladne definitnú maticu.

5. a) Nájdite pseudoinverz $x^\dagger$ pre nenulový stĺpcový (resp. riadkový) vektor x s n zložkami.

b) Pre nenulové (stĺpcové) vektory $a, b \in \mathbb{R}^n$ nájdite podmienku, aby platilo

$$(a^T b)^\dagger = b^\dagger \left(a^T\right)^\dagger.$$

6. Nech $A_{n\times n}$ je kladná matica a x jej Perronov vektor. Ukážte, že ak platí $\min_i \sum_{j=1}^n a_{ij} = \rho(A)$ *alebo* $\max_i \sum_{j=1}^n a_{ij} = \rho(A)$, potom $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \frac{1}{n}$ (t.j. zložky Perronovho vektora sa rovnajú) a súčet zložiek v každom riadku matice A je práve $\rho(A)$.