

Úlohy (strany a číslovanie) sú z knihy Carla D. Meyera *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*.

1. (7.1.7) Vysvetlite, prečo by malo byť na prvý pohľad zjavné, že nula nie je vlastnou hodnotou matice $A_{n \times n} = \begin{pmatrix} n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & n & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n \end{pmatrix}$, a teda je A regulárna.

2. (7.1.8) Zdôvodnite prečo sú vlastné hodnoty A^*A a AA^* reálne a nezáporné pre $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$.
Návod: Uvažujte $\|Ax\|_2^2 / \|x\|_2^2$. Kedy sú vlastné hodnoty A^*A a AA^* kladné (ostrá nerovnosť)?

3. (7.1.10) a) Ukážte, že ak (λ, x) je pár vlastná hodnota – vlastný vektor pre maticu A , potom (λ^k, x) tvorí taký pár pre A^k , kde k je ľubovoľné kladné celé číslo.

b) Ak $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_k x^k$ je ľubovoľný polynóm, definujeme $p(A)$ ako

$$p(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \dots + \alpha_k A^k.$$

Ukážte, že ak (λ, x) je pár vlastná hodnota – vlastný vektor pre maticu A , potom $(p(\lambda), x)$ tvorí taký pár pre $p(A)$.

4. (7.1.11) Vysvetlite ako z Geršgorinovej vety vyplýva, že $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ musí mať aspoň dve reálne vlastné hodnoty. Následne overte výpočtom.

5. (7.1.12) Zdôvodnite, že ak A je *nilpotentná* matica ($A^k = 0$ pre nejaké k), tak $\text{Tr}(A) = 0$.

Návod: Aké je $\sigma(A)$?

6. (7.1.17) Nech $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ sú vlastné hodnoty $A_{n \times n}$ a (λ_k, c) je jeden z párov vlastná hodnota – vlastný vektor.

a) Vysvetlite prečo pre $\lambda \notin \sigma(A)$ platí $(A - \lambda I)^{-1}c = c/(\lambda_k - \lambda)$.

b) Pre ľubovoľný vektor $d_{n \times 1}$ dokážte, že vlastné hodnoty matice $A + cd^T$ sa zhodujú s vlastnými hodnotami matice A , s tým, že λ_k sa nahradí $\lambda_k + d^T c$.

c) Ako sa dá vybrať d , aby sa vlastné hodnoty matíc $A + cd^T$ a A zhodovali, s výnimkou toho, že λ_k sa nahradí predpísaným číslom μ ?

7. (7.1.18) Nech A je štvorcová matica.

a) Zdôvodnite prečo majú A a A^T rovnaké vlastné hodnoty.

b) Zdôvodnite prečo $\lambda \in \sigma(A) \Rightarrow \bar{\lambda} \in \sigma(A^*)$.

Návod: Čo je $\chi_{A^*}(\bar{\lambda})$?

c) Vyplýva z predošlých výsledkov, že $\lambda \in \sigma(A) \Leftrightarrow \bar{\lambda} \in \sigma(A)$, ak má matica A reálne zložky?

d) Nenulový riadkový vektor y^* sa nazýva *ľavý* vlastný vektor matice A , ak existuje skalár μ , pre ktorý $y^*(A - \mu I) = 0$. Zdôvodnite, prečo musí byť μ aj “pravostranná” vlastná hodnota matice A , ak má A reálne zložky.

8. (7.1.19) Uvažujme matice $A_{m \times n}$ a $B_{n \times m}$.

a) Zdôvodnite prečo AB a BA majú tie isté charakteristické polynómy, ak $m = n$. *Návod:* pozri 6.2.16

b) Vysvetlite, prečo musia byť charakteristické polynómy AB a BA rôzne ak $m \neq n$, a potom zdôvodnite, prečo sa $\sigma(AB)$ a $\sigma(BA)$ zhodujú s možnou výnimkou nulovej vlastnej hodnoty.

9. (7.1.20) Ak $AB = BA$, dokážte, že A a B majú spoločný vlastný vektor.

Návod: Nech pre $\lambda \in \sigma(A)$ tvoria stĺpce matice X bázu podpriestoru $\mathcal{N}(A - \lambda I)$. Ukážte, že $(A - \lambda I)BX = 0$ a zdôvodnite, prečo musí existovať štvorcová matica P splňajúca $BX = XP$. Zameralajte sa potom na (ľubovoľný) vlastný vektor a príslušnú vlastnú hodnotu matice P .

10. (7.1.21) Pre fixné matice $P_{m \times m}$ a $Q_{n \times n}$ definujme lineárny operátor T na $M_{m \times n}(\mathbb{C})$ predpisom $T(A) = PAQ$.

a) Ukážte, že ak x je pravý vlastný vektor pre P a y^* je ľavý vlastný vektor pre Q , potom xy^* je vlastný vektor pre T .

b) Vysvetlite prečo $\text{Tr}(T) = \text{Tr}(P) \text{Tr}(Q)$.

11. (7.1.23) *Newtonove rovnosti* Nech $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sú korene polynómu $p(\lambda) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \dots + c_n$ a označme $\tau_k = \lambda_1^k + \lambda_2^k + \dots + \lambda_n^k$. Newtonove rovnosti hovoria, že $c_k = -(\tau_1 c_{k-1} + \tau_2 c_{k-2} + \dots + \tau_{k-1} c_1 + \tau_k)/k$. Odvoďte tieto rovnosti pomocou nasledujúcich krokov:

a) Ukážte, že $p'(\lambda) = p(\lambda) \sum_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i)^{-1}$ (*logaritmická derivácia*).

b) Použite rozvoj geometrického radu pre $(\lambda - \lambda_i)^{-1}$ na dôkaz rovnosti

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda - \lambda_i} = \frac{n}{\lambda} + \frac{\tau_1}{\lambda^2} + \frac{\tau_2}{\lambda^3} + \dots,$$

pre $|\lambda| > \max_i |\lambda_i|$.

c) Porovnajte tieto dva výsledky pre príslušné mocniny λ .

12 (7.2.21) Predpokladajme, že (λ, x) a (μ, y^*) sú pravý pár vlastná hodnota/vlastný vektor, resp. ľavý pár vlastná hodnota/vlastný vektor pre $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, t.j. $Ax = \lambda x$ a $y^* A = \mu y^*$. Vysvetlite prečo $y^* x = 0$ ak $\lambda \neq \mu$.