

Podvádanie pri písomke je vážnym porušením Študijného poriadku FMFI UK, ktoré môže viesť k vylúčeniu zo štúdia. Nerobte hlúposti. Počas písomky je zakázané používať mobilné telefóny a iné elektronické zariadenia. Veľa zdaru!

Písomka z Maticového počtu, 26. november 2024

1. Nech A a B sú regulárne matice a maticu B dostaneme z A nahradením j -teho stĺpca A_{*j} iným stĺpcom b . Použite Sherman-Morrisonovu formulu a ukážte, že:

$$B^{-1} = A^{-1} - \frac{(A^{-1}b - e_j)[A^{-1}]_{j*}}{[A^{-1}]_{j*}b}.$$

Sherman-Morrisonova formula:

$$(A + cd^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}cd^TA^{-1}}{1 + d^TA^{-1}c}.$$

2. Majme (konečnorozmerné) vektorové priestory s normami $(U, \|\cdot\|_a)$, $(V, \|\cdot\|_b)$, $(W, \|\cdot\|_c)$ a lineárne transformácie $\alpha, \alpha' : U \rightarrow V$, $\beta : V \rightarrow W$.

- Uveďte definíciu operátorovej normy $\|\alpha\|$ pre lineárnu transformáciu α .
- Ukážte, že platí: $\|\beta \circ \alpha\| \leq \|\beta\|\|\alpha\|$.
- Ukážte, že pre skaláry $c, c' \in \mathbb{R}$ platí: $\|c\alpha + c'\alpha'\| \leq |c|\|\alpha\| + |c'|\|\alpha'\|$.

3. Majme štvorcovú $n \times n$ maticu $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$ s blokmi A_1 typu $k \times n$ a A_2 typu $(n - k) \times n$. Predpokladajme, že platí $\mathcal{N}(A_1) = \mathcal{R}(A_2^T)$.

- Ukážte, že $h(A_1) = k$ a $h(A_2) = n - k$, t.j. riadky A_1 (resp. A_2) sú lineárne nezávislé.
- Ukážte, že A je regulárna.

4. Nájdite maticu šikmej projekcie $P_{U(V)}$ na podpriestor $U = \text{span}[(1, 0, 1)^T, (1, 1, 0)^T]$ v smere podpriestoru $V = \text{span}[(0, 1, 1)^T]$. Ako vyzerá matica $P_{V(U)}$ šikmej projekcie na V v smere U ? A ako vyzerá matica $R_{U(V)}$ šikmej reflexie cez U v smere V ? Pozri priložený obrázok.