

Podvádžanie pri skúške je vážnym porušením Študijného poriadku FMFI UK, ktoré môže viesť k vylúčeniu zo štúdia. Nerobte hlúposti. Počas písomky je zakázané používať mobilné telefóny a iné elektronické zariadenia. Veľa zdaru!

Skúška z Maticového počtu I., 13. január 2025

1. Nech $J_{(n-1) \times (n-1)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 0 \end{pmatrix}.$

a) Ukážte, že vektory $x^k = \left(\sin \frac{\pi k}{n}, \sin \frac{2\pi k}{n}, \dots, \sin \frac{(n-1)\pi k}{n} \right)^T$, pre $k = 1, \dots, n-1$, sú vlastné vektory matice J a nájdite príslušné vlastné hodnoty.

b) Zdôvodnite prečo tvoria vektory $x^1, x^2, \dots, x^{n-1}$ ortogonálnu bázu $\mathbb{R}^{n-1}$

2. Majme maticu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Ukážte, že množina matíc $N = \{X \in M_{4,2} \mid AX = 0\}$ tvorí vektorový podpriestor v $M_{4,2}$. Nájdite jeho dimenziu a nejakú bázu.

b) Ukážte, že všetky pravé inverzné matice k matici A tvoria afinný podpriestor v $M_{4,2}$ a nájdite ho.

c) Ukážte, že množina vnútorných pseudoinverzov k (ľubovoľnej) matici A typu $m \times n$ tvorí afinný podpriestor v $M_{n,m}$.

Pozn. Vnútorný pseudoinverz spĺňa $AXA = A$.

3. Nech A je reálna matica typu $m \times n$ pre $m \geq n$.

a) Ukážte, že x -ová časť riešenia systému

$$(*) \quad \begin{pmatrix} I_m & A \\ A^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$$

je riešením minimalizačného problému

$$(**) \quad \min_x \|Ax - b\|_2.$$

b) Ukážte, že systém $(*)$ má jednoznačné riešenie práve vtedy, keď má problém najmenších štvorcov $(**)$ jednoznačné riešenie.

4. Nájdite matice $AA^\dagger$ a $A^\dagger A$, kde $A^\dagger$ je pseudoinverzná matica (Moore-Penrose) pre

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aké zobrazenia reprezentujú matice $AA^\dagger$ a $A^\dagger A$?

Pozn. Úloha sa dá vyriešiť aj bez výpočtu matice $A^\dagger$.

5. Pre $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ a $X \in M_{n \times m}(\mathbb{C})$ sú Penroseove axiómy:

$$\text{I) } AXA = A,$$

$$\text{III) } (AX)^* = AX$$

$$\text{II) } XAX = X,$$

$$\text{IV) } (XA)^* = XA.$$

a) Ukážte, že ak matica X spĺňa axiómy II) a III) a matica Y axiómy I) a III), potom $X = XAY$.

b) Ukážte, že ak matica X spĺňa axiómy II) a IV) a matica Y axiómy I) a IV), potom $X = YAX$.

c) Pomocou častí a) a b) dokážte, že systém Penroseových axiém I) – IV) má nanajvýš jedno riešenie.

6. Nech $n \geq 2$ a $A \in M_{n,n}$ je regulárna.

a) Ukážte, že ak je A kladná, potom A^{-1} nemôže byť nezáporná.

b) Ukážte, že situácia, že obe matice A aj A^{-1} sú nezáporné nastáva práve vtedy, keď A má v každom stĺpci práve jednu kladnú zložku. Opíšte súvis takejto matice s nejakou permutačnou maticou.