

Arnoldiho iterovanie

Napríek výzvam menám a skiatkám, metódy iterovania pomocou krylovových podpriestorov sú založené na pár fundamentálnych základných myšlienkach. Dá sa postupovať rôzne, tu sa pozrieme na Arnoldiho iterovanie, čo je aj tá si obdoba Gram-Schmidtových metód, ktorá dá Hessenbergov trar.

Analógia medzi Arnoldi a Gram-Schmidt

Chceli by sme upraviť hermitovskú maticu na Hessenbergov trar stĺpec po stĺpci pomocou unitárnej podobnosti, pričom máme zadaný prvý stĺpec  $q_1$ .

A ide to - máme Arnoldiho iteráciu.

Ák je  $A$  hermitovská, výsledok bude triagonálny a rekurentný vzťah s  $n$  členmi bude mať len tri  $\rightarrow$  dostaneme tak Lanczosovu iteráciu.

Analógia: ~~A~~ QR rozklad sa dá počítať dvojako:

- buď použijeme Householderove reflexie (odrazy)
- teda triangularizujeme  $A$  pomocou ortogonálnych operácií
- alebo robíme klasickú Gram-Schmidtovu ortogonalizáciu
- ortogonalizácia  $A$  pomocou (horších) trojuholníkových operácií.

• Householderove reflexie sú stabilnejšie a máme lepšiu maticu  $Q$  pri zaokrúhľovaní.

Gram-Schmidtov proces však môžeme ukončiť skôr (čo môže byť výhodnejšie pre obdĺžnikové matice a redukovaný QR pohľad).

Rovnako sa môžeme pozrieť na hľadanie Hessenbergovho tvaru  $A = QH Q^*$ :

- Householderove reflexie (z obidvoch strán A, lekcia 26)
- Arnoldiho iterácia (najprv  $q_{n+1}$  z  $q_1, q_2, \dots, q_n$ )

Teda Arnoldiho iterácia je analógiou G-S pre podčiastočnú transformáciu na Hessenbergov tvar.

- výhoda - dá sa ukončiť na pol ceste - čiastočná redukcia na Hessenbergov tvar, a to sa dá využiť pri kladaní vl. hodnôt, či riešení systémov.

	$A = QR$	$A = QH Q^*$
ortogonálne štruktúrovanie	Householder	obojstranný Householder
štruktúrovaná ortogonalizácia	Gram-Schmidt	Arnoldi

Vo zmysle:  $m > n$  sú kladné celé čísla, A je reálna  $m \times n$ , norma bude 2-norma  $\|\cdot\|_2$ .

Vstupovať bude aj vektor b - štartovací vektor. Typicky to bude náhodný (generický) vektor pre problémový vl. hodnot

a pravá strana pre riešenie systémov  $Ax = b$ , resp. počiatočný reziduál.

# Fungovanie Arnoldiho iterovania

4.9  
5.2

kompletná redukcia  $A$  na Hessenbergov tvar  
zodpovedá ortogonálnej podobnosti  $A = Q H Q^x$ , resp.

$$A Q = Q H.$$

Pri iteratívnych metódach sa však menššie nastavíme  
faj, že  $n$  je obrovské (prakticky nekonečno), takže  
počítanie prvej  $n \times n$  redukcie by bolo nepraktické.

Chceme najst len  $n$  stĺpcov z  $A Q = Q H$ .

$Q_n$  bude  $n \times n$  matrica

$$Q_n = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

(tu by sme mali použiť striktné značenie, ale bolo  
by to neprehľadné ...)

$\tilde{H}_n$  bude  $(n+1) \times n$  ľavý horný roh  $H$ , tiež v Hessenbergov

matrica:

$$\tilde{H}_n = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & & & \\ & & \dots & & \\ & & & & \\ & & & h_{n,n-1} & h_{n,n} \\ & & & h_{n+1,n-1} & h_{n+1,n} \end{bmatrix}$$

potom

$$A Q_n = Q_{n+1} \tilde{H}_{n+1}$$

$n \times n \quad n \times n \quad n \times (n+1) \quad (n+1) \times n$

teda

$$[A] \begin{bmatrix} | & \dots & | \\ q_1 & \dots & q_n \\ | & \dots & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & \dots & | \\ q_1 & \dots & q_{n+1} \\ | & \dots & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & \dots & \\ \dots & \dots & \\ h_{n+1,n-1} & \dots & h_{n+1,n} \end{bmatrix}$$



pre  $n$ -ty stĺpec máme:

33.4

$$Aq_n = h_{1n}q_1 + h_{2n}q_2 + \dots + h_{nn}q_n + h_{n+1,n}q_{n+1}$$

teda  $q_{n+1}$  spĺňa rekurentný vzťah s  $n+1$  členmi, v ktorých vystupujú predosté krylovove vektory  $q_1, \dots, q_n$ .

Arnoldiho iterácia je teda Gram-Schmidt (kolmenie) využívajúce tento rekurentný vzťah.

Algoritmus 33.1 Arnoldiho iterácia

$b =$  ľubovoľný,  $q_1 = b/\|b\|$

pre  $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned} & v = Aq_n \\ & \text{pre } j = 1 \text{ až } n \\ & \quad h_{jn} = q_j^* v \\ & \quad v = v - h_{jn} q_j \\ & h_{n+1,n} = \|v\| \quad [ \text{čo ak } h_{n+1,n} = 0? ] \\ & q_{n+1} = v / h_{n+1,n} \end{aligned}$$

Teda Arnoldiho proces je naozaj jednoduchý, 10-riadkov v MATLABE/OCTAVE.

Matica  $A$  vystupuje iba v súčine  $Aq_n$ , ktorý sa dá spočítať black-boxovo.

QR Faktorizácia a krylovova matrica

Arnoldiho iterácia sa dá interpretovať rôznymi spôsobmi. Z rekurentného vyjadrenia máme:

$$K_n = \langle b, Ab, \dots, A^{n-1}b \rangle = \langle q_1, q_2, \dots, q_n \rangle \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

vektory  $\{q_j\}$  tvoria ortonormálnu bázu krylovových 410  
5-3  
podpriestorov generovaných  $b$  a  $A$ .

Tabuľka Arnoldiho iterácia <sup>postupne</sup> vytvára ~~ale postupne~~ ortonormálnu bázu do seba obsahujúcich krylovových podpriestorov

$$\mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{K}_2 \subseteq \mathcal{K}_3 \subseteq \dots$$

Čiže máme krylovovu maticu

$$K_n = \begin{bmatrix} b & Ab & A^2b & \dots & A^{n-1}b \\ | & | & | & & | \\ | & | & | & & | \end{bmatrix}$$

a jej QR rozklad  $K_n = Q_n R_n$ , kde  $Q_n$  je matrica so stĺpcami  $q_1, \dots, q_n$ .

V Arnoldiho iterovaní matice  $K_n$  a  $R_n$  explicitne nepočítame. — bolo by to nestabilné, lebo stĺpce  $K_n$  konvergujú/smerujú k dominantnému vl. vektoru matice  $A$ .

Na druhej strane, tento popis vysvetľuje, prečo takto dostaneme niektoré vl. hodnoty —  $K_n$  obsahuje informáciu o

vl. hodnotách  $A$  (tych veľkých) a jej QR rozklad môže dať <sup>publizé</sup> vl. vektory.

To sa ponáša na <sup>vzťah</sup> ~~analogia~~ simultánneho iterovania a QR algoritmu.

jedno bolo nestabilné ale pochopiteľnejšie,  
 druhé je stabilné ale vieme komplikovanejšie.

Teda Arnoldi simultánne iterovanie  
 $b \quad Ab \quad A^2b \quad \dots \quad A^{n-1}b$   $A^n e_1 \quad A^n e_2 \quad \dots \quad A^n e_m$

skoro priame iteratívne

príamočiara / nestabilné	simult. iterovanie	QR-rozklad kryl. matice
vieme kompl. / stabilnejšie	QR2 alg.	Arnoldi



## Projekcia na kyglavé podpriestory

iný pohľad: výpočty v Arnoldiho iterovaní sa dajú chápať ako výpočet projekcií na nasledujúce kyglavé podpriestory.

Súčin  $Q_n^* Q_{n+1}$  je matrica typu  $n \times (n+1)$ , s 1

$$\begin{matrix} n \times n & n \times (n+1) \end{matrix}$$

na diagonále (ortonormalita  $q_1, \dots, q_{n+1}$ ) a nulami inde.

preto  $Q_n^* Q_{n+1} \tilde{H}_n$  bude strokovatá  $n \times n$  Hessenbergova

matrica  $H_n = \begin{bmatrix} h_{11} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{n-1, n-1} & h_{n-1, n} & \vdots \end{bmatrix}$  (t.j.  $\tilde{H}_n$  bez posledného riadku)

Mali sme  $A Q_n = Q_{n+1} \tilde{H}_n$ , čiže  $Q_n^* A Q_n = H_n$ .

Toto sa dá chápať ako matrica  $A$  sprojektoraná na  $K_n$  a vyjadrená v báze  $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ . Čo by to malo znamenať?

Uvažujme lineárny operátor  $K_n \rightarrow K_n$  daný ako:

pre  $v \in K_n$  spravme  $Av$  a sprojektujeme ho do

na  $K_n$ . Ortogonálny projektor  $C^n$  na  $K_n$  je daný

pomocou  $Q_n Q_n^*$ , takže toto zobrazenie bude  $Q_n Q_n^* A$

vzhľadom na štandardnú bázu  $C^n$ .

vzhľadom na bázu stĺpcov  $Q_n$  to bude  $Q_n^* (Q_n Q_n^* A) Q_n$

$$= Q_n^* A Q_n$$

Takéto projekcie sa v aplikovanej & num. matematike objavujú často. V iných kontextoch sa nazývajú Rayleigh-Ritzova procedúra — na diagonále sa objavujú Rayleighove podiely matice  $A$  vzhľadom na  $q_j$ .

Takýto projekčný proces je jednou z mysliteľných na práci metód konečných prvkov a tzv. spektrálnych metód riešenia PDR.

Keďže  $H_n$  je projekciou  $A$ , môžeme očakávať, že vl. hodnoty  $H_n$  budú niečo upovedať o vl. hodnotách matice  $A$ .  
 $n$ -prvková množina

$$\{\theta_j\} = \{\text{vl. hodnoty } H_n\}$$

Sa nazývajú Arnoldiho odhady vl. hodnôt (v kroku  $n$ ), resp. Ritzove hodnoty matice  $A$  (vzhľadom na  $K_n$ ).

V nasledujúcej lekcii uvidíme, že niektoré z nich sú veľmi dobre aproximáciou niektorých vl. hodnôt  $A$  a to aj keď  $n \ll m$ .

Ukončme toto vzprávanie vetou:

Veta 33.1

Matice  $Q_n$  generované Arnoldiho iterovaním pôchádzajú z QR rozkladu kylovarej matice

$$K_n = Q_n R_n.$$

Hessenbergove matice  $H_n$  sú zodpovedajúce projekcie

$$H_n = Q_n^* A Q_n$$

a nasledujúce iterácie sú prevzaté vzorcom

$$A Q_n = Q_{n+1} \tilde{H}_n.$$



Ako Arnoldiho algoritmus nachádza vl. hodnoty

Arnoldiho iterovanie je základom mnohých iteratívnych algoritmov numerickej lineárnej algebry, ale aj nástrojom na hľadanie vl. hodnôt hermitovských matic. Na túto dnuhú vlastnosť sa pozrieme v tejto lekcií a opíšeme aj súvislosť s teóriou polynomiálnych aproximácií, ktorá má široké využitie.

Výpočet vl. hodnôt Arnoldiho iterovaním

Iterovanie prebieha tak, ako je popísané v algoritme 33.1.

V každom kroku (alebo vo vybraných krokoch) vypočítame vl. hodnoty Hessenbergovej matice  $H_n$  štandardnými metódami (napr. QR algoritmus)

Toto sú "Arnoldiho odhady" alebo "Ritzove hodnoty".

Niektoré z nich konvergujú rýchlo (geometrický rad, teda lineárne).

Ak takúto konvergenciu pozorujeme máme s veľkou pravdepodobnosťou/istotou konvergenciu k vl. hodnote matice  $A$ .

Keďže  $n \ll m$ , nemôžeme očakávať, že najdeme všetky vl. hodnoty. ktoré teda najdeme?

Typicky objavíme extrémne vl. hodnoty - t.j. tie, ktoré sú blízko okraja spektra matice  $A$ .

Nasťaršie, toto sú vl. hodnoty, ktoré sú v aplikáciách najzaujímavejšie.



Napr. pri hydrodynamickej stabilite je ~~zaujímavé~~ cieľom (5.5)  
určiť či malá perturbácia hladkého toku môže narásť  
nestabilne, v tom prípade sa tok zmení na viac komplikovaný  
prípadne turbulentný.

Typicky sa problém linearizuje, nájde sa Jakobián riadiaci  
evolúciu malých perturbácií a hľadá sa vlastná hodnota  
najviac uapravo, t.j. s najväčšou reálnou časťou.

Ak je kladná (v pravej polovine) máme nestabilitu,  
ak je záporná (v ľavej polovine) tak sa stabilizuje.

Arnoldiho iterovanie sa dá upraviť tak, aby renormalizovalo prítomnosť  
všimnúc sa kľúčovým komplexným korinám (ktoré nás zaujímajú), tu  
sa budeme venovať základnej verzii - prečo konvergujú,  
prečo nachádza extrémne vl. hodnoty a ako rýchlo ich nachádza.

### Varovanie: nenormalita

Najprv ale upozornenie.

Fyzikálny význam ~~nehermityckých~~ vl. hodnôt nehermitovských  
matic nie je až taký významný, ako by sa zdalo.

Ak je matica ďaleko od normálnej  $\Rightarrow$  t.j. diagonalizovateľná  
matica je ďaleko od unitárnej  $\rightarrow$  vl. vektory sú ďaleko  
od ortonormality  $\rightarrow$  máme zlé podmienenosti  
vl. hodnôt.

Vlastné hodnoty teda nemusia vypovedať veľa o tom, ako sa

daný fyzikálny systém správa

(	malá zmena matice	- malá zmena
		správania
	ale veľká zmena vl. hodnôt	

- tie nemôžu hovoriť o veľkosti

Príklad tok ~~ca~~ kvapaliny cez kruhovú rúru - Jakobian

linearizovaný problém má vl. hodnoty v ľavej polovici  
→ mal by byť stabilný.

V realite sú však vysoko-úchvatné toky cez potrubia turbulentné.

Vysvetlenie tohto paradoxu spočíva v tom, že lineariizovaný problém síce má všetky "eigen-módy" tlmené, ale niektoré perturbácie v "nevlasťných" smeroch môžu byť zesilované nárastom.

k niečomu takému nemôže dôjsť pri normálnych operátoroch.

- t.j. ak sú symetrické, hermitovské či samo-adjungované.

- Ak je odpoveď veľmi citlivá na perturbácie, asi sa pýtame zlu odázru.

Odpoveď sa teda : ak <sup>majú</sup> ~~sa~~ počítať vl. hodnoty nehermitovských matic, ktoré sú veľmi citlivé na perturbácie - treba sa veľmi pozorne pýtať, či toto je naozaj to, čo sa má počítať.

- "Neakceptujte bez podobného vysvetlenia tvrdenia kolegov, že vl. hodnoty s číslom podmienenosti na úrovni  $10^4$  voči zložkám matice majú nejaký fyzikálny význam a sú pre ~~niečo~~ naozaj dôležité na počítanie."

Asi také situácie sú, ale oveľa častejšie ide

o slepú uličku - treba <sup>skúmať</sup> niečo iné ako počítať vl. hodnoty.



Nech  $x$  je vektor v krylovovom podpriestore  $\mathcal{K}_n = \langle b, Ab, \dots, A^{n-1}b \rangle$ ,  
 také  $x$  sa dá napísať ako LK momentu  $A$  pre násobených  $b$ :

$$x = c_0 b + c_1 Ab + c_2 A^2 b + \dots + c_{n-1} A^{n-1} b.$$

To sa dá zjednodušiť - je to polynóm v  $A$  pre násobených  $b$ ,

T.j. ak  $q(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_{n-1} z^{n-1}$ , potom

$$x = q(A) b. \quad (\text{úloha 33.1})$$

Keďže každý vektor v  $\mathcal{K}_n$  sa dá vyjadriť týmito dvoma spôsobmi, iterácie pomocou krylových podpriestorov sa dajú analyzovať pomocou maticových polynómov.

Jeden pohľad na Arnoldiho iterovanie je takýto:

Zoberme  $P^n = \{ \text{monické polynómy stupňa } n \}$

(vedúci koeficient pri člene stupňa  $n$  je 1) - afinný priestor

Uvažujme nasledujúci problém:

Arnoldiho/Lanczosov aproximálny problém

nájsť  $p^n \in P^n$  pre ktoré

$$\| p^n(A) b \| = \text{minimum}$$

(34.3)

(Norma  $\| \cdot \|$  je  $\| \cdot \|_2$  norma) (V budúcej lekcii sa bude zaoberať  $P_n$  - normalizované  $c_0 = 1$ )

Arnoldiho iterovanie rieši tento minimalizačný problém presne.

Veta 34.1 Polym sa Arnoldiho iterovanie nezastavi

(t.j.  $K_n$  má plnú hodnotu  $n$ ), minimalizačný problém 34.3 má jednoznačné riešenie  $p^n$  — charakteristický polynom matice  $H_n$ .

Dôkaz Najprv si všimnime: pre  $p \in P^n$  sa vektor  $p(A)b$  dá napísať v tvare  $p(A)b = A^n b - Q_n y$  pre nejaké  $y \in \mathbb{C}^n$ , kde stĺpce  $Q_n$  tvoria ortonormálnu bázu  $X_n$  a  $Q_n$  pochádza z Arnoldiho algoritmu 33.1.

Tým pádom je naša minimalizačná ekvivalentná problémom najmenších štvorcov: najst bod v  $X_n$  najbližšie k  $A^n b$ , matice:

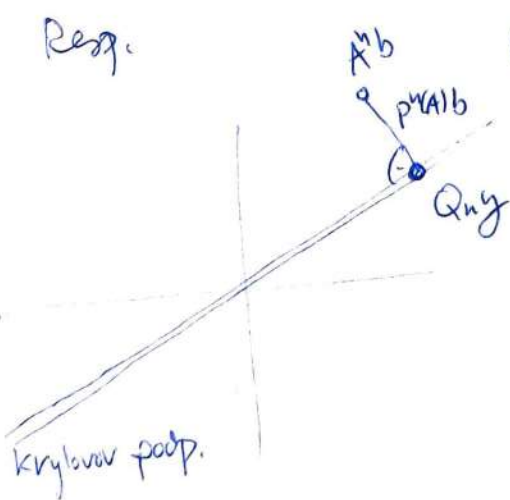
$$\|A^n b - Q_n y\| = \text{minimum.}$$

Riešenie je určené podmienkou kolmosti

$$p^n(A)b \perp X_n$$

Req.

$$Q_n^* p^n(A)b = 0$$



Uvažujme rozklad  $A = QH Q^*$ .

Po  $n$ -tom kroku Arnoldiho procesu sme našli prvých  $n$  stĺpcov  $Q$  a  $H$ ,

$$\text{teda } Q = \begin{bmatrix} Q_n & U \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} H_n & x_1 \\ x_2 & x_3 \end{bmatrix}$$

pre nejakú  $m \times (m-n)$   $U$  (ortonorm. stĺpce)

$n \times (m-n)$   $x_1$

$(m-n) \times n$   $x_2$  (iba prvý komuž  
všetchny)

$(m-n) \times (m-n)$   $x_3$

↖ Hermitbergova.



Podmienka ortogonality dá:

$$Q_n^* Q p^n(H) Q^* b = 0$$

$p^n(A)$

$$q_1 = b / \|b\| \quad (5-7)$$
$$Q^* b = \|b\| e_1$$

$Q_n^* Q$   $n \times n$  s diagonálou 1  $\rightarrow$  prvý u zložiek prvého stĺpca  $p^n(H)$  musí byť nulou.

Vzhľadom na štruktúru  $H$  (prvý horný uh  $\chi_2$  nevstupuje do hry) ať do mocnín  $s^{\text{exp. } n+1}$

aj prvý stĺpec  $p^n(H_n)$  musí byť nulový.

Vďaka Cayley-Hamiltonovej vete vieme že  $\chi_{H_n}$  má takúto vlastnosť.

Na druhej strane, ak by existoval iný monický polynóm  $s$

$p^n(A)b \perp \chi_n$ , potom rozdiel  $p^n - \chi_{H_n}$  by dal nenulovej  $q(A)$  stupňa  $\leq n-1$  s  $q(A)b = 0$  -

spor s tým, že  $\chi_n$  malo plnú hodnotu.

(kombinácia  $b, Ab, \dots, A^{n-1}b$ )

Toto tvrdenie nám dáva inú interpretáciu Ritzových hodnôt

(koreňov  $\chi_{H_n}$ ) - sú to korene optimálneho polynómu z problému 34.3

### Vlastnosti invariácie

Preďstá veľa ponúka pohľad na základné vlastnosti Arnoldiho iterovania: trieda monických polynómov  $P^n$  je invariantná vzhľadom na posunutie  $z \mapsto z + \alpha$ , teda Arnoldiho iterovanie je tiež translácie invariantné.

(Na rozdiel od iteratívnych algoritmov pre riešenie  $Ax=b$ , ako) GMRES, Arnoldiho iterovanie "nevadí počítateľ".

Táto vlastnosť invariácie môže zhrnúť v tvrdení:  
(dôsledok 34.1, bez dôkazov)

### lema 34.2

Správne Arnoldiho iterovanie s maticou  $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$

Translačná invariácia: Ak  $A$  zmeníme na  $A + \sigma I$  pre  
 $\sigma \in \mathbb{C}$  a  $b$  je bezrozmerý, potom sa Ritzove hodnoty  
zmenia z  $\{\theta_j\}$  na  $\{\theta_j + \sigma\}$  v každom kroku.

Škatoracia invariácia Ak  $A$  zmeníme na  $\sigma A$  pre  $\sigma \in \mathbb{C}$ ,  
 $b$  bude zmeny, potom sa Ritzove hodnoty zmenia na  
 $z \in \{\theta_j\}$  na  $\{\sigma \theta_j\}$ .

Invariácia vzhľadom na unitárnu podobnosť

Ak  $A$  zmeníme na  $U A U^*$  pre nejakú unitárnu  $U$  a  
 $b$  zmeníme na  $U b$ , potom sa Ritzove hodnoty  $\{\theta_j\}$   
nezmenia.

Vo všetkých troch prípadoch sa Ritzove vektory t.j.  $Q_n y_j$   
zodpovedajúce v. vektorom  $y_j$  matice  $H_n$  transformáciami  
nemennia.

Vďaka Schurovu vzhľadu vieme, že každá matica je unitárne  
podobná Hornej trojuholníkovej. Táže vďaka invariácii vzhľadom  
na unitárnu podobnosť by pre skúmanie konvergenčie  
Arnoldiho iterovania (Ritzových hodnôt) stačilo (v princípe)  
pozerať sa na horné trojuholníkové matice.

(normálnom) (diagonálne vstúča, lebo v hermitovskom svete)  
matice o matici aproxim v. hodnoty neupovedajú všetko



# Ako Arnoldiho Iterovanie nachádza vl. hodnoty

Tedaž môžeme prejsť k otázke z názvu tejto lekcie.

Podľa vety 34.1 je "cieľom" Arnoldiho iterovania vyriešiť polynomickej aproximácii problém, resp. nájsť <sup>problém</sup> najmenších stvorcov s kvadratickým podpriestorom.

Ak Arnoldiho algoritmus nachádza vl. hodnoty, je to odlišný produkt <sup>násenná</sup> týchto problémov.

Ako teda súvisí polynomiálna aproximácia s vl. hodnotami  $A$ ?

Súvis je asi takýto:

ak chceme nájsť polynóm, pre ktorý je  $P^n(A)$  malé, efektívna metóda bude vybrať  $p^n$ , ktorého korene sú blízko vl. hodnot  $A$  (lebo Cayley-Hamilton)   
 (dava  $\chi_A(A) = 0$ )   
 resp.  $m_A(A) = 0$

Uvažujme extrémny prípad:  $A$  je diagonalizovateľná a má len  $n \ll m$  rôznych vl. hodnot. Potom  $m_A$  minimálny polynóm je stupňa  $n$ . - podľa vety 34.1 po  $n$  krokoch nájdeme všetky vl. hodnoty presne, t.j. existuje  $a$  &  $b$  obsahujúce zložky zo všetkých vl. podpriestorov  $A$  (inak bude min. polynóm pre  $b$  nižšieho stupňa  $a$ )   
 ( $K_n$  nebude mať plnú hodnotu.)

Teda po  $n$  krokoch Arnoldiho iterovania dá presne minimálny polynóm.

V praxi sa deje niečo podobné - v tomto prípade sú však Ritzove hodnoty zhodné s vl. hodnotami len približne

a namiesto minimálneho polynómu dostávame len  
"pseudo-minimálny polynóm", t.j.  $P^n$  s  $\|P^n(A)\|$  malou.

## Arnoldiho lemmiskaty

Konvergencia sa dá graficky ilustrovať kverlením lemmiskát  
v komplexnej rovine.

Lemnisčata je krivka, alebo množina kriviek:

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |P(z)| = C\}$$

kde  $P$  je polynóm a  $C$  reálna konštanta - (t.j. najväčšie  
konštanty okolo  
koreňov)

Ak  $P$  je polynóm  $P^n$  z Arnoldiho iterovania v kroku  $n$  a

$C$  má hodnotu

$$C = \frac{\|P^n(A)\|}{\|b\|},$$

potom sa tieto krivky môžu nazývať Arnoldiho lemmiskaty.

Pre zväčšujúce sa  $n$  komponenty lemmiskát budú ohraničovať  
extrémne vl. hodnoty matice  $A$  a potom sa sčvrknú do bodu  
- 9 vl. hodnoty.

Pre ilustráciu: nech  $m=100$ , zložky sú i.i.d (nezvislé)  
z normálneho rozdelenia s priemerom 0 a odchytkou  $\frac{1}{\sqrt{m}}$ .

$A$  je reálna - vl. hodnoty sú popäťorane komplexné alebo  
reálne. Volba odchytky dá, že vl. hodnoty ujdú

komplexne distribované v kruhu  $|z| \leq 1$  (viz. 12.3)

Vytvoríme vl. hodnotu mimo, zmenou  $a_{11}$  na 1.5.

(obrázky)



Ap Použitím Arnoldiho iterování s náhodným vektorem  $q$ , 5.9

Najdeme matice  $H_n$ , ich charakteristický polynom a  
lemniskáty (pro  $n=5, 6, 7, 8$ )

pro  $n=1$  je to kruh, pro  $n=5$  má vybitenou směr  $\lambda$ ,  
pro  $n=6$  sa komponent oddělí a dáleším iterováním sevrkne.

### Geometrická (lineární) konvergence

Za stejných podmínek bude konvergence Arnoldiho odhadů  
vl. hodnot konvergovat k vl. hodnotám  $A$  geometricky.

Porozumenie stále nie je úplné a ~~keďže~~ teoretické  
výsledky by možno boli púliš neprehľadné.

Porozume sa na numerickú ilustráciu a jej vysvetlenie.

Z obrázku lemniskát sa neda <sup>práve</sup> výčísliť konvergenca púliš,  
posúdiť.

V grafe 34.4. máme  $|\lambda^{(n)} - \lambda|$  na logaritmickej škále

- konvergenca je geometrická - vidíme lineárnu čiaru na log-grafe.

Po 50-tich iteráciách je presnosť na 12 číslic, a niečo  
podobné by sa dostalo aj pre  $A$  rozmer  $1000 \times 1000$ .

Dá sa byť trochu viac kvalitatívny, počas prvej 12-tich  
iterácií máme konvergenca aproximovať ako

$$|\lambda^{(n)} - \lambda| \approx \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Vysvetlenie je uzľadavé:

aly sme minimalizovali  $\|P^n(A) b\|$

$p^n$  musí být zhruba minimum pro každou z vlastních hodnot matice  $A$ .

Zoberme  $p(z) = z^{n-1}(z - \tilde{\lambda})$ , kde  $\tilde{\lambda}$  je nějaké číslo blízko  $\lambda$  (maximální reálná hodnota  $\lambda \approx 1.4852 \approx \frac{3}{2}$ )

Pro reálné hodnoty normální jednotkové kružnice,  $|p(z)|$  je vždy 1 nebo méně. Pro  $z = \lambda$  ale máme:

$$|p(\lambda)| \approx \left(\frac{3}{2}\right)^n |\tilde{\lambda} - \lambda|$$

(vůbec by se to, ab by  $\lambda = \frac{3}{2}$ ). Ak je  $n$  velké,  $\left(\frac{3}{2}\right)^n$  je obrovské. Aby  $|p(\lambda)|$  bylo vždy 1,  $|\tilde{\lambda} - \lambda|$  musí být malé, vždy  $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ .

Z ilustrace vidno další typické vlastnosti krylových podp. <sup>Podp. aproximací</sup> po úvodním tuce iteraci se konvergence zrychlují.

→ iterování vyhledá nejvíce z reálných hodnot na okraji spektra.

Pro rozměr  $n=300$  by spektrum  $A$  bylo hustější a oblast reálných hodnot by vyplňvala jednotkovou kružnici těsněji – zrychlení by sme pozorovali po 50-tich iteracích.