Numerická lineárna algebra II. – Úloha č. 1

Termín odovzdania: 9. marec 2021

Úlohy (strany a číslovanie) sú z knihy Lloyda N. Trefethena a Davida Baua, III *Numerical Linear Algebra.*

1. (Pozri Lekcia 15, str. 110) V MATLAB-e alebo OCTAVE naprogramujte funkciu, ktorá vypočíta pre zadanú 2×2 maticu $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ jej vlastné hodnoty ako korene charakteristického polynómu $\chi(x) = x^2 - (a+d)x + (ad - bc)$. Na príkladoch $\left[\begin{smallmatrix} 1+5\times10^{-14} & -5\times10^{-14} \\ -5\times10^{-14} & 1+5\times10^{-14} \end{smallmatrix}\right]$ a $\left[\begin{smallmatrix} 1+5\times10^{-15} & -5\times10^{-15} \\ -5\times10^{-15} & 1+5\times10^{-15} \end{smallmatrix}\right]$ nájdite presné vlastné hodnoty a pozorujte, akú (ne)presnosť vieme dosiahnuť použitím procedúry EIG a riešením kvadratickej rovnice pomocou procedúry ROOTS.

2. (25.1.) (a) Nech $A \in M_{m,m}(\mathbb{C})$ je tridiagonálna a hermitovská s nenulovými zložkami na vedľajších diagonálach. Ukážte, že vlastné hodnoty matice A sú navzájom rôzne.
(*Návod:* Ukážte, že pre každé $\lambda \in \mathbb{C}$ má matica $A - \lambda I$ hodnosť aspoň $m - 1$.)
(b) Predpokladajme, že A je v hornom Hessenbergovom tvare, pričom všetky zložky na dolnej vedľajšej diagonále sú nenulové. Nájdite príklad matice, ktorá bude mať viacnásobnú vlastnú hodnotu.

3. (25.3.) Predpokladajme, že máme 3×3 maticu, pre ktorú chceme vynulovať niektoré jej zložky ľavým a/alebo pravým násobením unitárnymi maticami Q_j, ako sú Householderove reflektory alebo Givensove rotácie. Uvažujme nasledujúce tri maticové štruktúry:

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} \times & \times & 0 \\ 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times \end{bmatrix}, \qquad \text{(b)} \begin{bmatrix} \times & \times & 0 \\ \times & 0 & \times \\ 0 & \times & \times \end{bmatrix}, \qquad \text{(c)} \begin{bmatrix} \times & \times & 0 \\ 0 & 0 & \times \\ 0 & 0 & \times \end{bmatrix}.$$

Pre každú rozhodnite, ktorá z nasledujúcich situácií nastáva a zdôvodnite.
(i) Dá sa dosiahnuť postupnosťou ľavých násobení maticami Q_j;
(ii) Neplatí (i), ale dá sa dosiahnuť postupnosťou ľavých a pravých násobení maticami Q_j;
(iii) Nedá sa dosiahnuť žiadnou postupnosťou pravých a ľavých násobení maticami Q_j.

4. (26.1.) Veta 26.1 a jej obdoby v nasledujúcich kapitolách hovorí, že dokážeme numericky vypočítať približné vlastné hodnoty $\{\tilde{\lambda}_j\}$ matice A, ktoré sú presnými vlastnými hodnotami matice $A + \delta A$ s $\|\delta A\|/\|A\| = O(\epsilon_{\text{machine}})$. Znamená to, že sú blízko presným vlastným hodnotám $\{\lambda_j\}$ matice A? Takouto otázkou sa zaoberá teória perturbácií vlastných hodnôt.

Pri jej skúmaní môžeme postupovať geometricky nasledovne. Pre $A \in M_{m,m}(\mathbb{C})$ so spektrom $\Lambda(A) \subseteq \mathbb{C}$ a $\epsilon > 0$ definujme *ϵ-pseudospektrum* $\Lambda_\epsilon(A)$ matice A vzľadom na 2-normu ako množinu čísel $z \in \mathbb{C}$ spĺňajúcich ľubovoľnú z podmienok:
(i) z je vlastnou hodnotou matice $A + \delta A$ pre nejakú maticu δA s $\|\delta A\|_2 \leq \epsilon$;
(ii) Existuje vektor $u \in \mathbb{C}^m$ spĺňajúci $\|(A - zI)u\|_2 \leq \epsilon$ a $\|u\|_2 = 1$;
(iii) $\sigma_m(zI - A) \leq \epsilon$;
(iv) $\|(zI - A)^{-1}\|_2 \geq \epsilon^{-1}$.

Matica $(zI - A)^{-1}$ v (iv) sa nazýva *rezolventa* matice A v bode z. Ak z je vlastnou hodnotou matice A používame konvenciu, že $\|(zI - A)^{-1}\|_2 = \infty$. V (iii), σ_m označuje najmenšiu singulárnu hodnotu.

Ukážte, že podmienky (i)–(iv) sú ekvivalentné.

5. (26.3.) Jedným z najznámejších výsledkov v teórii perturbácií vlastných hodnôt je *Bauer-Fikeho veta.* Predpokladajme, že $A \in M_{m,m}(\mathbb{C})$ je diagonalizovateľná ako $A = V\Lambda V^{-1}$ a $\delta A \in M_{m,m}(\mathbb{C})$ je ľubovoľná. Potom každá z vlastných hodnôt matice $A + \delta A$ leží v aspoň jednom z kruhov so stredom vo vlastnej hodnote matice A a polomerom $\kappa(V)\|\delta A\|_2$, kde κ je číslo podmienenosti vzhľadom na 2-normu. (Porovnaj s Príkladom 24.2 – *Geršgorinovou vetou*).

(a) Dokážte Bauer-Fikeho vetu pomocou ekvivalencií podmienok (i) a (iv) z Príkladu 26.1.

(b) Predpokladajme, že A je normálna. Ukážte, že pre každú vlastnú hodnotu $\tilde{\lambda}_j$ matice $A + \delta A$ existuje vlastná hodnota λ_j matice A spĺňajúca

$$|\tilde{\lambda}_j - \lambda_j| \leq \|\delta A\|_2.$$