

Numerická lineárna algebra II. – Úloha č. 3

Termín odovzdania: 9. marec 2022

Úlohy (strany a číslovanie) sú z knihy Lloyd N. Trefethena a Davida Baua, III *Numerical Linear Algebra*.

1. (30.1) Odvoďte formulu (30.4) na str. 226 a uveďte presný geometrický popis transformácie (30.1) založenej na tejto voľbe θ .

2. (30.3) Ukážte, že ak sa počas každého kroku Jacobiho algoritmu vynuluje najväčšia mimodiagonálna zložka, potom súčet štvorcov mimodiagonálnych zložiek klesne v každom kroku minimálne o faktor $1 - 2/(m^2 - m)$.

3. (30.5) Napíšte program, ktorý nájde vlastné hodnoty reálnej $m \times m$ matice pomocou Jacobiho algoritmu so štandardným poradím riadkov a zobrazením súčtu štvorcov mimodiagonálnych zložiek na log-škále v závislosti od počtu zametení (*sweeps*). Otestujte svoj program na náhodných maticiach rozmerov 20, 40 a 80.

4. (30.7) Skonstruujte náhodnú reálnu symetrickú tridiagonálnu maticu T rozmeru 100 a vypočítajte jej spektrálny rozklad $T = QDQ^T$. Zobrazte zopár vlastných vektorov na log škále (absolútne hodnoty zložiek zopár stĺpcov matice Q) a pozorujte fenomén lokalizácie. Aká časť z 10 000 zložiek matice Q je väčších ako 10^{-10} v absolútnej hodnote? Aká bude odpoveď, ak namiesto náhodnej matice T zoberieme diskretný Laplacián s diagonálami 1, -2, 1?