Numerická lineárna algebra II. – Úloha č. 6

Termín odovzdania: 30. marec 2023

Úlohy (strany a číslovanie) sú z knihy Lloyda N. Trefethena a Davida Baua, III *Numerical Linear Algebra.*

1. (34.3) Nech A je $N \times N$ bidiagonálna matica so zložkami $a_{k,k+1} = a_{k,k} = k^{-1/2}$, $N = 64$. (V limite $N \to \infty$ bude A nesamoadjungovaný kompaktný operátor.)

a) Vykreslite spektrum $\Lambda(A)$ a hranice ϵ-pseudospektier $\Lambda_\epsilon(A)$ pre $\epsilon = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$. (Pozri cvičenia 26.1 a 26.2)

b) Začínajúc s náhodným počiatočným vektorom zbehnite Arnoldiho iteráciu a vypočítajte Ritzove hodnoty v krokoch $n = 1, 2, \ldots, 30$. Vykreslite grafy dokumentujúce rýchlosť konvergencie k vlastným hodnotám matice A a okomentujte výsledky vašich výpočtov.

c) Arnoldiho iterovanie sa dá použiť na aproximáciu pseudospektier matice A pomocou pseudospektier matíc H_n alebo $\tilde{H}_n$. (V druhom prípade, keďže ide o obdĺžnikovú maticu, použijeme definíciu hranice $\Lambda_\epsilon(\tilde{H}_n)$ pomocou podmienky $\sigma_{\min}(zI - \tilde{H}_n) = \epsilon$, alebo, ekvivalentne, $\|(zI - \tilde{H}_n)^+\| = \epsilon^{-1}$, kde I je príslušná obdĺžniková obdoba identity.) Experimentujte s týmto prístupom a zobrazte ϵ-pseudospektrá matice $\tilde{H}_n$ pre $n = 5, 10, 15, 20$. Ako presne kopírujú príslušné pseudospektrá matice A?

2. (35.1) Ukážte, že ak $S \subseteq \mathbb{C}$ obsahuje nekonečne veľa bodov, potom $\|p\|_S = \sup_{z \in S} |p(z)|$, (35.14) definuje normu na vektorovom priestore všetkých polynómov s komplexnými koeficientami. Vysvetlite, čo sa pokazí, ak by bola množina S konečná.

3. (35.2) a) Nech $S \subseteq \mathbb{C}$ je množina, ktorej konvexný obal obsahuje 0 ako vnútorný bod. To znamená, že S nie je obsiahnutá v žiadnej polrovine neobsahujúcej počiatok. Ukážte, že potom neexistuje žiaden $p \in P_1$ (t.j. žiaden polynóm p stupňa n s $p(0) = 1$), pre ktorý $\|p\|_S < 1$.

b) Nech A je matica, nie nutne normálna, ktorej spektrum $\Lambda(A)$ má vlastnosť z časti a). Ukážte, že neexistuje $p \in P_1$ spĺňajúce $\|p(A)\| < 1$.

c) Napriek tomu, že konvergencia na obrázku 35.5 je pomalá, zjavne platí $\|r_1\| < \|r_0\|$. Vysvetlite, prečo toto neodporuje výsledku časti b). Opíšte aký typ polynómu $p_1 \in P_1$ asi našiel algoritmus GMRES aby sa dosiahlo $\|r_1\| < \|r_0\|$.

4. (35.3) Rekurentný predpis $x_{n+1} = x_n + \alpha r_n = x_n + \alpha(b - Ax_n)$, kde α je skalárna konštanta sa nazýva *Richardsonovo iterovanie.*

a) Aký polynóm $p(A)$ zodpovedá tomuto iterovaniu v kroku n?

b) Akú konštantu α by ste navrhli pre maticu A z obrázka 35.2 a akú by ste očakávali príslušnú rýchlosť konvergencie?

c) Rovnaké otázky pre maticu z obrázka 35.4.

5. (35.5) V popise GMRES algoritmu (Algoritmus 35.1) sme začali s počiatočným odhadom $x_0 = 0$ a $r_0 = b$. (Rovnako pre CG a BCG, Algoritmy 38.1 a 39.1) Ukážte, že ak by sme chceli začať s ľubovoľným počiatočným odhadom x_0, dá sa to docieliť jednoduchým pozmenením pravej strany b.