

Úlohy (strany a číslovanie) sú z knihy Lloyd N. Trefethena a Davida Baua, III *Numerical Linear Algebra*.

**1.** (38.3) Pri použití metódy združeného gradientu pre symetrickú kladne definitnú maticu  $A$  sa dosiahli hodnoty  $\|e_0\|_A = 1$  a  $\|e_{10}\|_A = 2 \times 2^{-10}$ . Ako by ste na základe týchto údajov

- a) vedeli odhadnúť číslo podmienenosti  $\kappa(A)$ ?
- b) A aké by bolo ohraničenie  $\|e_{20}\|_A$ ?

**2.** (39.1) Uvažujme úlohu  $Ax = b$  pre  $m \times m$  maticu z (39.5).

a) Ukážte, že jej singulárne hodnoty sú 1, z čoho vyplýva, že algoritmus CGN skonverguje v jednom kroku.

b) Ukážte, že jej vlastné hodnoty sú  $m$ -té odmocniny z jednotky, a kvôli tomu algoritmus GMRES pre všeobecné  $b$  potrebuje  $m$  krokov na dokonvergovanie.

c) Takáto matica  $A$  je príliš štruktúrovaná – na to, aby sme porozumeli správaniu konvergenzie netreba poznať jej vlastné ani singulárne hodnoty. Konkrétne, vysvetlite na príklade prečo bude GMRES algoritmus potrebovať  $m$  krokov pre skonvergovanie pre pravú stranu  $b = (1, 0, 0, \dots, 0)$ .

**3.** (39.2) Ako protiklad k cvičeniu 39.1, zostrojte maticu ľubovoľného rozmeru  $m$  so skoro opačnými vlastnosťami: GMRES skonverguje v dvoch krokoch, ale CGN si bude vyžadovať plných  $m$  krokov.