

Úlohy (strany a číslovanie) sú z knihy Lloyd N. Trefethena a Davida Baua, III *Numerical Linear Algebra*, resp. článku *Randomized Numerical Linear Algebra: Foundations & Algorithms* od P-G. Martinssona a J. A. Troppa.

**1.** (39.5) Ktorý z algoritmov CG, GMRES, CGN alebo BCG by ste očakávali ako najefektívnejší pre riešenie  $m \times m$  úlohy  $Ax = b$ ? Dôvody?

a)  $A$  je hustá nehermitovská matica s  $m = 10^4$ , ktorej všetky vlastné hodnoty, s výnimkou troch, sú približne rovné  $-1$ .

b) Rovnako ako v a), ale tentoraz sa všetky vlastné hodnoty, s výnimkou troch, nachádzajú zhruba rovnomerne v oblasti  $-10 \leq \text{Real}(\lambda) \leq 10$ ,  $-1 \leq \text{Imag}(\lambda) \leq 1$ .

c)  $A$  je riedka nehermitovská matica s  $m = 10^6$ , iba s  $10^7$  nenulovými zložkami a vlastnými hodnotami ako v a).

d)  $A$  je riedka hermitovská matica s  $m = 10^5$ , ktorej vlastné hodnoty sa nachádzajú v celom intervale  $[1, 100]$ .

e) Rovnako ako v d), ale tentoraz má  $A$  ešte navyše dve osamotené vlastné hodnoty  $0.01$  a  $10\,000$ .

f) Rovnako ako v e) s dodatočnými odľahlými hodnotami  $-1$ ,  $-10$  a  $-100$ .

g)  $A$  je riedka normálna matica s  $m = 10^5$ , ktorej komplexné vlastné hodnoty sa nachádzajú zhruba rovnomerne v medzikruží  $1 \leq |\lambda| \leq 2$ .

**2.** (40.1) Majme  $A = M - N$ , kde  $M$  je regulárna matica. Predpokladajme, že  $\|I - M^{-1}N\|_2 \leq 1/2$  a  $M$  sa použije ako predpodmienkovacia matica ako v (40.2).

a) Ukážte, že ak na takto predpodmienkovanú úlohu použijeme GMRES iterovanie, norma reziduálu zaručene klesne po dvadsiatich krokoch aspoň o šesť rádov.

b) Koľko krokov CGN je potrebných pre zaručený pokles rovnakej úrovne?

**3.** *Rovnoúhle priamky (equiangular lines):*

a) Doplňte náčrt dôkazu, že maximálny počet rovnoúhlych priamok v  $\mathbb{C}^n$  je  $n^2$ :

- majme rovnoúhle vektory  $x_1, \dots, x_D$  s normou 1 v  $\mathbb{C}^n$ ,
- $|\langle x_i, x_j \rangle| = a \iff \text{Tr}((x_i x_i^*)(x_j x_j^*)) = a^2 \implies$  hermitovské projekčné matice  $x_i x_i^*$  sú pre  $i = 1, \dots, D$  lineárne nezávislé v  $n^2$ -rozmernom reálnom VP hermitovských matíc typu  $n \times n$ .

(Pre detaily pozri napr. <https://symomega.files.wordpress.com/2009/11/perth.pdf>)

b) ukážte, že systém  $n^2$  rovnoúhlych priamok v  $\mathbb{C}^n$  (príklad 4.7.2 (1) v Martinsson-Tropp) je optimálnym meracím systémom (Def 4.7.1) a naozaj spĺňa rovnosti 4.5, 4.6 a 4.7.